Solucionario Aritmética 5.°

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 6) Unidad 1

1. I. $(2 \times 1 = 2) \vee (3 \times 2 = 6)$
$\underbrace{}_{V} \vee \underbrace{}_{V} \equiv V$

II. $\underbrace{(3 < -3)}_{F} \wedge \underbrace{(4 > 2)}_{V} \equiv F$

III. $\underbrace{(3 + 4 = 7)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(4 \times 0 = 1)}_{F} \equiv F$

IV. $\underbrace{(2^0 = 1)}_{V} \Leftrightarrow \underbrace{(0^2 = 0)}_{V} \equiv V$

Los valores de verdad: VFFV

Clave C

2. $\underbrace{(p \wedge q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(r \vee t)}_{F} \equiv F$

• $\underbrace{p}_{V} \wedge \underbrace{q}_{V} \equiv V$ • $\underbrace{r}_{F} \vee \underbrace{t}_{F} \equiv F$

$p \equiv V$; $q \equiv V$; $r \equiv F$; $t \equiv F$

$\therefore$ p y q son verdaderas.

Clave A

3. $(p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$
$(p \wedge \sim q) \vee \sim p$ ...(Distributiva)
$\sim(\sim p \vee q) \vee \sim p$ ...(De Morgan)
$\sim(p \Rightarrow q) \vee \sim p$ ...(Condicional)
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$ ...(Condicional)

$\therefore (p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$

Clave E

4. I. $\underbrace{\text{Si: } 3 + 1 = 7}_{F}$, $\underbrace{\text{entonces:}}_{\Rightarrow}$ $\underbrace{4 + 4 = 8}_{V}$
Luego: $F \Rightarrow V \equiv V$

II. No es verdad que:
$\underbrace{2 + 2 = 5}_{F}$, $\underbrace{\text{si y solo si}}_{\Leftrightarrow}$, $\underbrace{4 + 4 = 10}_{F}$
Luego: $\sim(F \Leftrightarrow F) \equiv \sim(V) \equiv F$

III. $\underbrace{\text{Madrid está en España}}_{V}$ $\underbrace{\text{o}}_{\vee}$
$\underbrace{\text{Londres está en Francia.}}_{F}$
Luego: $V \vee F \equiv V$

Clave A

5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \overbrace{[(p \wedge \sim q) \vee (p \vee q)]}^{(1)}$
$[\{(p \wedge \sim q) \vee p\} \vee q]$
$[\underbrace{\{p \vee (p \wedge \sim q)\}}_{p} \vee q]$

Luego:
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$
$(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \vee q)$
$\sim(\sim p \vee q) \vee (p \vee q)$
$\underbrace{(p \wedge \sim q) \vee (p \vee q)}_{p \vee q}$ ...por (1)
$\therefore (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (p \vee q)] \equiv p \vee q$

Clave D

6. Se tiene: $p \,\square\, q \equiv \sim p \wedge q$
Entonces:
$[(p \,\square \sim p)] \Rightarrow [(p \,\square\, q) \,\square\, q]$
$(\sim p \wedge \sim p) \Rightarrow [\sim(p \,\square\, q) \wedge q]$
$\underbrace{(\sim p \wedge \sim p)}_{\sim p} \Rightarrow \underbrace{(\sim(\sim p \wedge q)}_{(p \vee \sim q)} \wedge q)$
$\sim p \Rightarrow [(p \vee \sim q) \wedge q]$
$\sim p \Rightarrow [q \wedge (\sim q \vee p)]$
$\sim p \Rightarrow (q \wedge p)$ ...(Absorción)
$\sim(\sim p) \vee (q \wedge p)$
$\underbrace{p \vee (p \wedge q)}_{p}$ ...(Absorción)

$\therefore [(p \,\square \sim p)] \Rightarrow [(p \,\square\, q) \,\square\, q] \equiv p$

Clave C

7. $\underbrace{[(p \wedge \sim q) \wedge (r \Rightarrow q)]}_{V} \wedge \underbrace{[(\sim p \vee q) \Rightarrow \sim q]}_{V} \equiv V$

• $\underbrace{(p \wedge \sim q)}_{V} \wedge \underbrace{(r \Rightarrow q)}_{V} \equiv V$

$p \wedge \sim q \equiv V$ (p: V, q: F) $\quad r \Rightarrow q \equiv V$ (r: F, q: F)

• $(\underbrace{\sim p}_{F} \vee \underbrace{q}_{F}) \Rightarrow \underbrace{\sim q}_{V}$
$\underbrace{(F \vee F)}_{F} \Rightarrow V$
$F \Rightarrow V \equiv V$
$\therefore p \equiv V$; $q \equiv F$; $r \equiv F$

Clave C

8. $\sim[(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)]$
$\sim[(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p] \Rightarrow [q \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)]$
$\sim\{[(p \vee q) \wedge \sim p] \vee [\sim(p \vee q) \wedge p]\} \Rightarrow [\sim q \vee (\sim p \vee \sim q)]$
$\sim\{[(p \vee q) \wedge \sim p] \vee [\underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \wedge \sim q]\} \Rightarrow [\underbrace{(\sim q \vee \sim q)}_{\sim q} \vee \sim p]$
$\sim\{[(p \vee q) \wedge \sim p] \vee \underbrace{(F \wedge \sim q)}_{F}\} \Rightarrow (\sim q \vee \sim p)$
$\sim[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
$[(p \vee q) \wedge \sim p] \vee (\sim p \vee \sim q)$
$\underbrace{[\underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \vee (q \wedge \sim p)]}$ $\vee (\sim p \vee \sim q)$
$(q \wedge \sim p) \vee (\sim p \vee \sim q)$
$\underbrace{[(q \wedge \sim p) \vee \sim p]}_{\sim p} \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$
$\therefore \sim[(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)] \equiv \sim(p \wedge q)$

Clave C

9. De la equivalencia:

$p \# q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (q \vee \sim p)$
$p \# q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$ ...(Idempotencia)
$p \# q \equiv \sim p \vee q$

Entonces:

$$(p \# \sim q) \# \sim p \equiv \sim(p \# \sim q) \vee \sim p$$
$$\equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim p$$
$$\equiv (p \wedge q) \vee \sim p$$
$$\equiv \underbrace{\underbrace{(p \vee \sim p)}_{V} \wedge (q \vee \sim p)}_{(q \vee \sim p)}$$

$\therefore (p \# \sim q) \# \sim p \equiv$ y $(q \vee \sim p)$

Clave C

10. Por dato:

- $\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{F} \vee \underbrace{\sim r}_{V} \equiv F$

También: $\underbrace{p}_{V} \Rightarrow \underbrace{q}_{F} \equiv F$

- $\underbrace{(s \Leftrightarrow p)}_{F} \vartriangle \underbrace{r}_{V} \equiv V$

También: $\underbrace{s}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{p}_{V} \equiv F$

Luego:

I. $\sim(p \vee s) \equiv \sim(V \vee F) \equiv \sim(V) \equiv F$
$\Rightarrow$ I $\equiv$ V, no es correcto.

II. $(s \wedge t) \equiv (F \wedge t) \equiv F$
$\Rightarrow$ II $\equiv$ F, es correcto.

III. $(q \Rightarrow s) \equiv (F \Rightarrow F) \equiv V$
$\Rightarrow$ III $\equiv$ V, es correcto.
$\therefore$ Son correctas II y III.

Clave C

11. $\{\sim(p \wedge q) \wedge [\sim(p \wedge q) \vee r]\} \wedge \sim q$

Sea $t = \sim(p \wedge q)$, entonces:

$$\underbrace{\{t \wedge [t \vee r]\}}_{t} \wedge \sim q \equiv \sim (p \wedge q) \wedge \sim q$$

Luego:

$\sim(p \wedge q) \wedge \sim q \equiv \sim q \wedge \sim(p \wedge q)$
$\sim(p \wedge q) \wedge \sim q \equiv \sim q \wedge (\sim p \vee \sim q)$
$\sim(p \wedge q) \wedge \sim q \equiv \sim q \wedge (\sim q \vee \sim p)$
$\sim(p \wedge q) \wedge \sim q \equiv \sim q$
$\therefore \{\sim(p \wedge q) \wedge [\sim(p \wedge q) \vee r]\} \wedge \sim q \equiv \sim q$

Clave B

12. El circuito se puede representar por:

$q \wedge [(q \vee \sim p) \vee (\sim q \vee p)] \wedge \sim p$
$q \wedge [\{(q \vee \sim p) \vee \sim q\} \vee p] \wedge \sim p$
$(\sim p \wedge q) \wedge [\{(q \vee \sim q) \vee \sim p\} \vee p]$
$(\sim p \wedge q) \wedge [\{V \vee \sim p\} \vee p]$
$(\sim p \wedge q) \wedge [V \vee p]$
$(\sim p \wedge q) \wedge V \equiv \sim p \wedge q$
$\therefore q \wedge [(q \vee \sim p) \vee (\sim q \vee p)] \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge q$

Clave D

13. $M \equiv \{(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim q \vee p) \wedge \sim(p \wedge q)\}$

$M \equiv (\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$ ...(De Morgan)
$M \equiv (\sim p \vee q) \Rightarrow [\sim q \vee (p \wedge \sim p)]$ ... (Distributiva)

$$\underbrace{\sim q \vee \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F}}_{\sim q}$$

$M \equiv (\sim p \vee q) \Rightarrow \sim q$
$M \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim q$ ...(Condicional)
$M \equiv (p \wedge \sim q) \vee \sim q$ ...(De Morgan)
$M \equiv \underbrace{\sim q \vee (\sim q \wedge p)}_{\sim q}$ ...(Absorción)
$\therefore M \equiv \sim q$

Clave D

14. $\sim[\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim q] \vee p$

$\sim[\sim[\sim(p \wedge q)] \vee \sim q] \vee p$ ...(Condicional)
$\sim[(p \wedge q) \vee \sim q] \vee p$ ...(Doble negación)
$\sim[(p \vee \sim q) \wedge \underbrace{(q \vee \sim q)}_{V}] \vee p$ ...(Distributiva)
$\sim[(p \vee \sim q)] \vee p$ ... (Ley de identidad)
$(\sim p \wedge q) \vee p$ ... (De Morgan)
$\underbrace{p \vee (\sim p \wedge q)}_{(p \vee q)}$ ... (Absorción)

$\therefore \sim[\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim q] \vee p \equiv p \vee q$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

1. Los enunciados (I) y (II) son proposiciones ya que se les puede asignar un valor de verdad.
Los enunciados (III), (IV) y (V) no son proposiciones, ya que no se les puede asignar un valor de verdad.

Clave A

2. Si no es el caso que Eusebio no es el culpable

$\underbrace{\text{no es el caso que}}_{\sim}$ $\underbrace{\text{Eusebio no es el culpable}}_{\sim p}$

o el testigo no diga la verdad, entonces

$\underbrace{\text{o}}_{\vee}$ $\underbrace{\text{el testigo no diga la verdad}}_{\sim q}$ $\underbrace{\text{entonces}}_{\Rightarrow}$

$\underbrace{\text{el juez no dictará una sentencia.}}_{\sim r}$

$\therefore \sim(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim r$

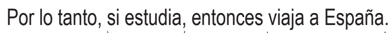
Clave B

3. p: si estudia
q: gana la beca
r: viaja a España

$\underbrace{\text{Si estudia}}_{p}$, $\underbrace{\text{entonces}}_{\Rightarrow}$ $\underbrace{\text{gana la beca}}_{q}$.

$\underbrace{\text{Si gana la beca}}_{q}$, $\underbrace{\text{entonces}}_{\Rightarrow}$ $\underbrace{\text{viaja a España}}_{r}$.

Por lo tanto, si estudia, entonces viaja a España.



$\Rightarrow$ p $\Rightarrow$ r

$\therefore\ [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Clave C

Razonamiento y demostración

4. p: 8 es un número primo. (F)

q: 36 es el MCM de 18 y 4. (V)

r: 2^{-1} es un número racional. (V)

I. $(p \vee \sim q) \wedge r$
$(F \vee F) \wedge V$
$F \wedge V \equiv F$

II. $(r \wedge p) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$
$(V \wedge F) \Rightarrow (V \wedge V)$
$F \Rightarrow V \equiv V$

Clave C

5. p: 91 es un número primo. (F)

q: toda proposición es verdadera. (F)

I. $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$
$(F \Rightarrow V) \wedge (F \vee F)$
$V \wedge F \equiv F$

II. $(\sim p \vee q) \vee (p \Rightarrow q)$
$(V \vee F) \vee (F \Rightarrow F)$
$V \vee V \equiv V$

III. $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (p \vee q)$
$(V \Rightarrow V) \Rightarrow (F \vee F)$
$V \Rightarrow F \equiv F$

Los valores de verdad serán: FVF

Clave A

Resolución de problemas

6.

p	q	r	[∼p	⇒	(r	⇒	∼q)]	∨	[∼	(∼p	Δ	r)	∨	q)
V	V	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	F	F	F

Tautología

Clave A

7.

p	q	r	[(r	∧	∼p)	⇒	∼q]	Δ	[p	⇔	(∼r	Δ	∼q)]
V	V	V	V	F	F	V	F	V	V	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	F	V	V	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	V	F	V

Matriz principal

Clave B

8.

p	q	(p	λ	∼q)]	Δ	[(q	λ	∼p)	λ	p]
V	V	V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F	F	V	V	F

Matriz principal

Clave A

9. $[(\sim p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge (\sim q \vee r)$

$[\sim(\sim p \wedge q) \vee r] \wedge (\sim q \vee r)$

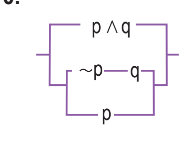
$[(p \vee \sim q) \vee r] \wedge (\sim q \vee r)$

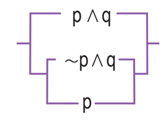
$(\sim q \vee r) \wedge [(\sim q \vee r) \vee p] \equiv \sim q \vee r$

$\therefore\ [(\sim p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [\sim q \vee r] \equiv \sim q \vee r$

Clave B

10.





p ∧ q

(∼p∧q)∨p

p ∧ q

p ∨ q

$(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

Luego:

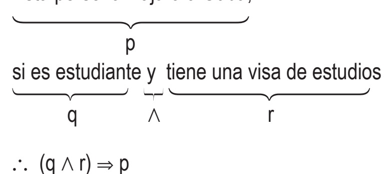
$(p \wedge q) \vee p \vee q \equiv p \vee q$

Clave B

Nivel 2 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

11. Esta persona viajará a Cuba;



p

si es estudiante y tiene una visa de estudios

q $\wedge$ r

$\therefore\ (q \wedge r) \Rightarrow p$

Clave A

12. Simbolizando el enunciado, tenemos:

$\{(q \vee r) \Rightarrow \sim p\} \wedge (p \Rightarrow \sim q)$

$\{\sim(q \vee r) \vee \sim p\} \wedge (p \Rightarrow \sim q)$

$\{\sim p \vee \sim(q \vee r)\} \wedge (p \Rightarrow \sim q)$

$\{p \Rightarrow \sim(q \vee r)\} \wedge (p \Rightarrow \sim q)$

Empleando ley distributiva:

$p \Rightarrow \{\sim(q \vee r) \wedge \sim q\}$

$p \Rightarrow \{(\sim q \wedge \sim r) \wedge \sim q\}$

$p \Rightarrow (\sim q \wedge \sim r)$

Clave A

Razonamiento y demostración

13. Por dato:

- $(p \vee \sim q) \equiv V$ ...(1)

$\downarrow \quad \downarrow$

p	q
V	F
V	V
F	F

- $(q \wedge p) \equiv F$ ...(2)

$\downarrow \quad \downarrow$

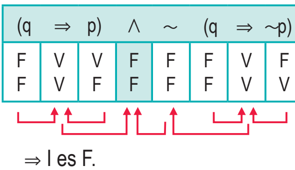
q	p
V	F
F	V
F	F

De (1) y (2) se deduce:

p	q
V	F
F	F

Luego en:

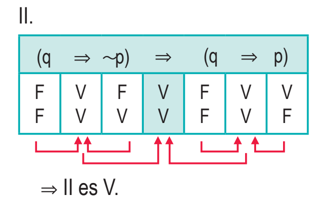
I.



(q	⇒	p)	∧	∼	(q	⇒	∼p)
F	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	V	V

⇒ I es F.

II.



(q	⇒	∼p)	⇒	(q	⇒	p)
F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	F

⇒ II es V.

III.

[∼p	∧	∼q)	⇔	p	∨	q
F	F	V	F	V	V	F
V	V	V	F	F	F	F

⇒ III es F.

Por lo tanto, los valores de verdad son: FVF.

Clave A

14. I.

p	q	∼	(q	⇒	∼p)	⇔	(q	∨	p)
V	V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V	F	F	F

II.

p	q	[(∼p	∧	∼q)	∨	∼q]	⇔	∼	[(p	∨q)	∧ q]
V	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F

III.

p	q	∼	(p ⇒ q)	⇔	[(p ∨ q)	∧	∼q]
V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F	V

Por lo tanto, II y III son equivalentes.

Clave B

Resolución de problemas

15.

$$\sim\{\underbrace{\sim[(p \wedge q) \Rightarrow r]}_{F} \wedge \underbrace{[(p \Rightarrow q) \vee p]}_{V}\}^{\overbrace{}^{V}} \equiv F$$

- $\underbrace{(p \wedge q)}_{V} \Rightarrow \underset{F}{r} \equiv F$

Entonces: $p \equiv V$; $q \equiv V$ ...(1)

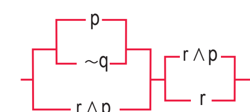
- $(p \Rightarrow q) \vee p \equiv V$ ...(2)

Los valores de (1) también verifican en (2).

Por lo tanto, los valores de verdad de las variables proposicionales p, q y r son respectivamente VVF.

Clave B

16.



$p \wedge \sim q$ / $r \wedge p$ — $(r \wedge p) \vee r$ —

— $(p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)$ — $(r \wedge p) \vee r$ —

— $[(p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)] \wedge [(r \wedge p) \vee r]$ —

Luego:

$[(p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)] \wedge [(r \wedge p) \vee r]$

$\equiv [p \wedge (\sim q \vee r)] \wedge r$

$\equiv \underbrace{p \wedge (\sim q \vee r)}_{r} \wedge r = p \wedge r$

Clave D

17.

p	q	{[(p	↓	q)	↓	∼q]	↓	∼	(∼p	↓	q)}	↓	∼p
V	V	V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F	V	V	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F	F	V

Matriz principal

Clave E

18.

p	q	r	{[(p	⇔	q)	Δ	r]	⇒	~	(q	∧	~r)}	∨	p
V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	F

Tautología

Clave A

19.

I. $\sim\{\sim p \wedge \sim[\sim q \wedge (q \vee p)]\}$
$\equiv \sim\{\sim p \wedge [q \vee \sim(q \vee p)]\}$
$\equiv \sim\{\sim p \wedge [q \vee (\sim p \wedge \sim q)]\}$
$\equiv \sim\{\sim p \wedge [q \vee \sim p]\}$
$\equiv \sim\{\sim p\} \equiv p$

II. $\sim[p \wedge (\sim p \Rightarrow \sim r)]$
$\equiv \sim[p \wedge (p \vee \sim r)]$
$\equiv \sim p$

III. $\sim\{\sim[\sim[(p \wedge t) \vee \sim(\sim p \vee t)]]\}$
$\equiv \sim\{\sim[\sim[(p \wedge t) \vee (p \wedge \sim t)]]\}$
$\equiv \sim\{\sim[\sim[p \wedge (t \vee \sim t)]]\}$
$\equiv \sim\{\sim[\sim[p \wedge V]]\}$
$\equiv \sim\{\sim[\sim[p]]\}$
$\equiv \sim\{p\} \equiv \sim p$

Clave B

20. Si: $p \# q \equiv \sim p \vee q$

Entonces:
$(p \# \sim q) \# (q \# \sim p) \equiv (\sim p \vee \sim q) \# (\sim q \vee \sim p)$
$\equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee \sim p)$
$\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$
$\equiv \underbrace{(p \wedge q) \vee \sim(p \wedge q)}_{V}$ (Por complemento)

Luego:
$(p \# \sim q) \# (q \# \sim p) \equiv V$ (Es una tautología)

Clave E

Nivel 3 (página 9) Unidad 1

Comunicación matemática

21. Si Juan sube las escaleras o José no sube las escaleras,
(p ∨ ~q)
es suficiente para que Pedro suba las escaleras y José no se compre un reloj.
⇒ (r ∧ ~s)

$(p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim s)$

Clave B

22. p: Luis es abogado.
q: Carlos es biólogo.
r: Juan es administrador.

I. Si Juan es administrador y Luis no es abogado
(r ∧ ~p)
entonces Carlos no es biólogo.
⇒ ~q

I. $(r \wedge \sim p) \Rightarrow \sim q$

II. Luis es abogado, pero Juan no es administrador.
p ∧ ~r

II. $p \wedge \sim r$

Clave B

Razonamiento y demostración

23. Sea:

E: $\sim\{\{[(\sim q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow s)]\} \Leftrightarrow \{[t \Rightarrow (\sim u \wedge w)] \wedge [t \wedge (w \Rightarrow u)]\}\}$

Si E ≡ F, entonces H ≡ V, donde:

H: $\underbrace{\{[(\sim q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow s)]\}}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{\{[t \Rightarrow (\sim u \wedge w)] \wedge [t \wedge (w \Rightarrow u)]\}}_{B}$

B: $\{[t \Rightarrow (\sim u \wedge w)] \wedge [t \wedge (\sim w \vee u)]\}$
$\equiv \{[\sim t \vee (\sim u \wedge w)] \wedge [t \wedge (\sim w \vee u)]\}$
$\equiv \underbrace{\{\sim[t \wedge (u \vee \sim w)] \wedge [t \wedge (\sim w \vee u)]\}}_{F}$

B ≡ F
Luego: A ≡ F

A: $\{[\underbrace{(\sim q \wedge r)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow s)}_{F}]\}$

- $\sim q \wedge r \equiv V$; $q \equiv F$
  ↓ ↓
  V V
- $p \Rightarrow s \equiv F$
  ↓ ↓
  V F

Luego:
I. Verdadero
II. Verdadero
III. Falso

Clave A

24. De la tabla, $p_1 \alpha p_2 \equiv F$ solamente si $p_1 \equiv F$ y $p_2 \equiv V$

Por dato:
$\underbrace{[(\sim p\ \alpha\ q) \vee (r \Rightarrow s)]}_{F}\ \alpha \sim(t\ \alpha\ u)$

Entonces:
$[\underbrace{(\sim p\ \alpha\ q)}_{F} \vee \underbrace{(r \Rightarrow s)}_{F}] \equiv F$

De donde: p = V; q = V; r = V; s = F

$\sim\underbrace{(t\ \alpha\ u)}_{F} \equiv V$

De donde: t = F; u = V

Luego:

I. $(\sim s \wedge \sim t)\ \Delta\ (p \Leftrightarrow q)$
$(V \wedge V)\ \Delta\ (V \Leftrightarrow V)$
V Δ V
F

II. $\sim[\sim(p \Rightarrow r) \wedge (t \vee \sim q)]$
$\sim[\sim(V \Rightarrow V) \wedge (F \vee F)]$
$\sim[\sim V \wedge F]$
$\sim[F \wedge F]$
$\sim[F]$
V

III. $(p \triangle r) \vee \sim\{\sim\{\sim[(p \Leftrightarrow \sim t) \wedge \sim u]\}\}$

$(V \triangle V) \vee \sim\{\sim\{\sim[(V \Leftrightarrow V) \wedge F]\}\}$

$F \vee \sim\{\sim\{\sim[F]\}\}$

$F \vee \sim\{\sim\{\sim[F]\}\}$

$F \vee \sim F$

$F \vee V$

V

Clave C

Resolución de problemas

25. $\sim\{[\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow p)] \wedge (p \vee q)\}$

(Condicional)

$\sim\{[(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)] \wedge (p \vee q)\}$

(Condicional y De Morgan)

$\sim \{[(\sim p \vee q) \vee (q \wedge \sim p)] \wedge (p \vee q)\}$

(Distributiva)

$\sim\{[((\sim p \vee q) \vee q) \wedge ((\sim p \vee q) \vee \sim p)] \wedge (p \vee q)\}$

$\sim\{[(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)] \wedge (p \vee q)\}$

(Idempotencia)

$\sim\{(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)\}$

(Distributiva)

$\sim\{(\sim p \wedge p) \vee q\}$

(Complemento)

$\sim\{F \vee q\}$

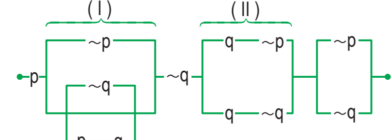
(Identidad)

$\sim\{q\} \equiv \sim q$

$\therefore \sim\{[\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow p)] \wedge (p \vee q)\} \equiv \sim q$

Clave D

26.



De (I):

$[\sim p \vee \{(\sim q \vee (p \wedge q))\}]$

$[(\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q)]$

$[\sim(p \wedge q) \vee (p \wedge q)] \equiv V$ (Complemento)

De (II):

$[(q \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)]$

$[(q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge p)]$

$[(q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge \sim(\sim p))] \equiv q \Leftrightarrow \sim p$

(Bicondicional)

Luego, el circuito lógico queda así:

$p \wedge V \wedge \sim q \wedge (q \Leftrightarrow \sim p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

$(p \wedge \sim q) \wedge (q \Leftrightarrow \sim p) \quad \wedge (\sim p \vee \sim q)$

$\underbrace{(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)}_{(p \wedge \sim q)} \wedge (q \Leftrightarrow \sim p)$

$(p \wedge \sim q) \quad \wedge (q \Leftrightarrow \sim p)$

Luego:

p	q	(p	∧	~q)	∧	(q	⇔	~p)
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F	V	V	V
F	F	F	F	V	F	F	F	V

Por lo tanto, el operador principal es: FVFF.

Clave D

27. Por dato:

$(p * q) \equiv \sim(p \Rightarrow q)$

$(p * q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$

$(p * q) \equiv p \wedge \sim q$

Piden, el equivalente de:

$[(p * \sim q) * (\sim p * q)] * p$

$[(p \wedge q) * (\sim p \wedge \sim q)] * p$

$[(p \wedge q) \wedge (p \vee q)] * p$

$[(p \wedge q) \wedge (p \vee q)] \wedge \sim p$

$(p \wedge q) \wedge \{(p \vee q) \wedge \sim p\}$

$(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge q)$

$(q \wedge p) \wedge (\sim p \wedge q)$

$q \wedge \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \wedge q \equiv F$

Luego:

$[(p * \sim q) * (\sim p * q)] * p \equiv F \equiv p \wedge \sim p$

$\therefore [(p * \sim q) * (\sim p * q)] * p \equiv p \wedge \sim p$

Clave D

28.

$T = [(a \Rightarrow b) \vee (\sim a \wedge \sim b)] \wedge (a \vee b)$

$a \equiv (p \Rightarrow q) \wedge q$

$a \equiv q \wedge (p \Rightarrow q) = q \wedge (\sim p \vee q)$

$a \equiv q \wedge (q \vee \sim p) \rightarrow a \equiv q$

$b \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \Rightarrow q)$

$b \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

$b \equiv \sim p \vee (\sim q \wedge q)$

$b \equiv \sim p \vee F \rightarrow b \equiv \sim p$

Luego:

$T = [(q \Rightarrow \sim p) \vee (\sim q \wedge p)] \wedge (q \vee \sim p)$

$T = [(\sim q \vee \sim p) \vee \sim\underbrace{(q \vee \sim p)}_{r}] \wedge (q \vee \sim p)$

$T = [(\sim q \vee \sim p) \vee \sim r] \wedge r$

$T = (\sim q \vee \sim p) \wedge r$

$T = (\sim q \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)$

$T = (\sim q \wedge q) \vee \sim p$

$T = F \vee \sim p$

$\therefore T = \sim p$

Clave B

29. $p \equiv [(a \Rightarrow b) \wedge (\sim b \Rightarrow \sim a)] \vee a$

$p \equiv [(\sim a \vee b) \wedge (b \vee \sim a)] \vee a$

$p \equiv [(b \vee \sim a) \wedge (b \vee \sim a)] \vee a$

$p \equiv (b \vee \sim a) \vee a\} = \{b \vee (\sim a \vee a)\}$

$p \equiv b \vee V$

$p \equiv V$

$m \equiv [(b \triangle b) \Rightarrow (a \wedge \sim b)]$

$m \equiv [F \Rightarrow (a \wedge \sim b)]$

$m \equiv V$

$n \equiv [(a \wedge \sim b) \vee (a \wedge b)] \vee \sim a$

$n \equiv [a \wedge (\sim b \vee b)] \vee \sim a$

$n \equiv [a \wedge V] \vee \sim a$

$n \equiv a \vee \sim a$

$n \equiv V$

Piden:

$f(p) + f(m) + f(n) = 1 + 1 + 1$

$\therefore f(p) + f(m) + f(n) = 3$

Clave D

30. $\sim[t \Rightarrow (\sim s \wedge \sim t)] \wedge \{\sim r \vee \{[t \wedge [p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee [t \wedge [p \wedge (r \Rightarrow \sim q)]]\}\}$

$\equiv \sim[\sim t \vee (\sim s \wedge \sim t)] \wedge \{\sim r \vee \{[t \wedge [p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee [t \wedge [p \wedge (\sim r \vee \sim q)]]\}\}$

$\equiv \sim[\sim t] \wedge \{\sim r \vee \{[t \wedge [p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee [t \wedge [p \wedge \sim(r \wedge q)]]\}\}$

$\equiv t \wedge \{\sim r \vee \{[t \wedge [p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee t \wedge \sim[\sim p \vee (r \wedge q)]]\}\}$

$\equiv t \wedge \{\sim r \vee \{[t \wedge [p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee [t \wedge \sim[p \Rightarrow (q \wedge r)]]\}\}$

$\equiv t \wedge \{\sim r \vee \{t \wedge [[p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee \sim[p \Rightarrow (q \wedge r)]]\}\}$

$\equiv t \wedge \{\sim r \vee \{t \wedge V\}$

$\equiv t \wedge \{\sim r \vee t\} \equiv t$

Clave E

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 11) Unidad 1

1.

I. $\{\varnothing; \{\varnothing\}\} \in P(T)$ (verdadero)
$\varnothing$ y $\{\varnothing\}$ son elementos de T, entonces el conjunto conformado por estos elementos es un subconjunto de T, por lo tanto, es un elemento de P(T).

II. $\{s\} \in T$ (falso)
$\{s\}$ no es un elemento de T.

III. $\{\varnothing\} \in T$ (verdadero)
$\{\varnothing\}$ es un elemento de T.

IV. $\{\{\varnothing\}\} \subset T$ (verdadero)
$\{\varnothing\}$ es un elemento de T, entonces $\{\{\varnothing\}\}$ es un subconjunto de T.

V. $\{\{\varnothing\}; \{r; s\}\} \in P(T)$ (falso)
$\{r; s\}$ no es un elemento de T.

VI. $r \in T$ (falso)
r no es un elemento de T.

Clave B

2. Determinamos F por extensión:
$F = \{-1; 0; 1\}$
Luego:

I. Verdadero
$x = -1$: $(-1)^2 - 1 \leq 3$ (V)
$x = 0$: $(0)^2 - 1 \leq 3$ (V)
$x = 1$: $(1)^2 - 1 \leq 3$ (V)

II. Verdadero
Para $x = -1$: $\dfrac{1}{-1} = -1 \in \mathbb{Z}$

III. Verdadero
$x = -1$; $y = -1$: $(-1)^2 - 1 = 0$
$x = 0$; $y = 0$: $(0)^2 - 0 = 0$
$x = 1$; $y = -1$: $(1)^2 - 1 = 0$

IV. Falso
$x = -1$: $(-1)^3 - 1 > 0$ (F)
$x = 0$: $0^3 - 1 > 0$ (F)
$x = 1$: $(1)^3 - 1 > 0$ (F)

Clave A

3. Se tiene:
$9 = 10 - 1$
$99 = 10^2 - 1$
$999 = 10^3 - 1$
$9999 = 10^4 - 1$
$99999 = 10^5 - 1$

Luego, el conjunto L determinado por comprensión es:
$L = \{10^n - 1 / n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n < 6\}$

Clave E

4. Por dato: $x \,.\, y = 18$; $x, y \in \mathbb{Z}^+$
Entonces:
$x = 1$; $y = 18$: $x + y = 19$
$x = 2$; $y = 9$: $x + y = 11$
$x = 3$; $y = 6$: $x + y = 9$
$x = 6$; $y = 3$: $x + y = 9$
$x = 9$; $y = 2$: $x + y = 11$
$x = 18$; $y = 1$: $x + y = 19$

Luego: $J = \{9; 11; 19\}$
$\therefore n(J) = 3$

Clave A

5. Por dato: $p \in \mathbb{Z}^+ \wedge p\sqrt{p} \in A$
Entonces:
$p = 1 : 1\sqrt{1} = 1 \in A$
$p = 4 : 4\sqrt{4} = 8 \in A$
$p = 9 : 9\sqrt{9} = 27 \in A$
$p = 16 : 16\sqrt{16} = 64 \in A$
Luego: $B = \{2; 5; 10; 17\}$

Clave D

6. $x = \{0; 1; 2; \{1\}\} \Rightarrow n(x) = 4$
$P(x) = 2^{n(x)} = 2^4$
$P(x) = 16$

Clave E

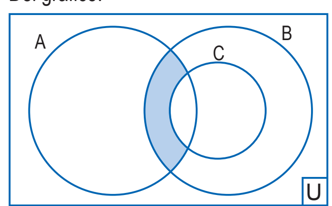
7. Primero hallemos todos los subconjuntos:
$2^5 = 32$
Los conjuntos que restaremos serán el vacío y los conjuntos donde se tenga solo una fruta (5).
$2^5 - 1 - 5 = 32 - 6 = 26$

Clave D

8. $A = \{a + b + c; a + 2\}$ es unitaio
$\Rightarrow a + b + c = a + 2$
$b + c = 2$ ...(1)
$B = \{c^2 + 1; d + a + 1; 5\}$ es unitario
$c^2 + 1 = d + a + 1 = 5$
$c = 2 \quad \wedge \quad d + a = 4$ ...(2)
Luego:
$b + c + d + a = 6$

Clave E

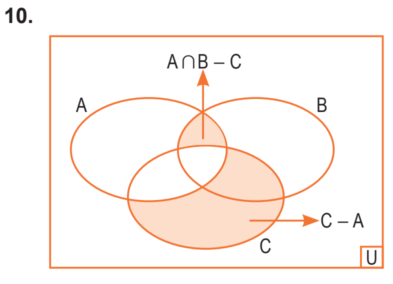
9. Del gráfico:



A la intersección de A y B le han restado el conjunto C.
$(A \cap B) - C$

Clave D

10.



Por lo tanto:
La parte sombreada es:
$[(A \cap B) - C] \cup (C - A)$

Clave E

11. $(A \cup B) \cap \{(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)\}^C$

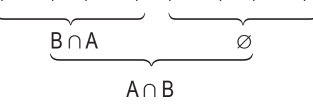
$(A \cup B) \cap \{((A \cap B^C) \cup A^C) \cap ((A \cap B^C) \cup B)\}^C$

$(A \cup B) \cap \{((A \cup A^C) \cap (B^C \cup A^C)) \cap ((A \cup B) \cap (B^C \cup B))\}^C$

$(A \cup B) \cap \{(U \cap (B \cap A)^C) \cap ((A \cup B) \cap U)\}^C$

$(A \cup B) \cap \{(B \cap A)^C \cap (A \cup B)\}^C$

$(A \cup B) \cap \{(B \cap A) \cup (A \cup B)^C\}$



Clave D

12. Se sabe que $A \subset (A \cup B)$ y por dato:

$D \subset A \subset (A \cup B) \Rightarrow D \subset (A \cup B)$

También observamos: $(A \cup B) \subset D \Rightarrow A \subset D$

Luego:

• $D \subset A \wedge A \subset D \Rightarrow A = D$

• $D \subset (A \cup B) \wedge (A \cup B) \subset D \Rightarrow D = A \cup B$

Entonces: $A = A \cup B = D$

Además:

$1 - p = p \vee 1 - p = p + 1 \vee 1 - p = p + 2$

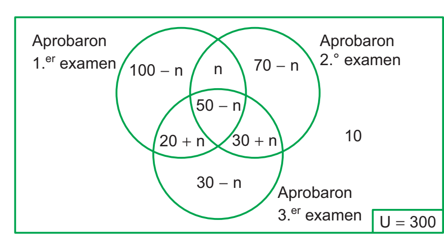
$\Rightarrow p = \frac{1}{2}$ $\quad p = 0 \quad (p \in \mathbb{Z})$ $\quad \Rightarrow p = -\frac{1}{2}$

Por lo tanto: $A = \{0; 1; 2\}$

Nos piden: $n(A) + p = 3 + 0 = 3$

Clave B

13.



Aprobaron como mínimo 2 exámenes:

$(20 + n) + (50 - n) + n + (30 + n) = 100 + 2n$

Todos los que aprobaron algún examen suman 290:

$(100 - n) + (20 + n) + n + (50 - n) + (70 - n) + (30 + n) + (30 - n) = 290$

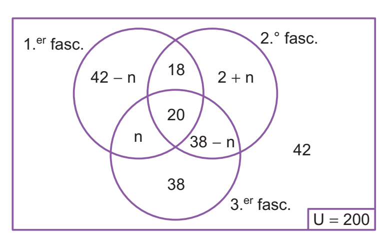
$300 - n = 290$

$n = 10$

Luego: $100 + 2n = 100 + 2(10) = 120$

Clave B

14.



Tienen 1 solo fascículo:

$(42 - n) + (2 + n) + 38 = 82$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 13) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

A) $P \times Q = \{(4; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 4); (5; 5); (5; 6); (6; 4); (6; 5), (6; 6); (7; 4); (7; 5); (7; 6)\}$

B) $n(P \times Q) = 12$

2. A) $A = \{3x + 1 / x \in \mathbb{N}; x \leq 5\}$

$B = \{2x + 5 / x \in \mathbb{N}; x \leq 5\}$

B) $n(A \triangle B) = 8$

C) $C = \{0; 4\} \Rightarrow A \cap C = \{4\}$

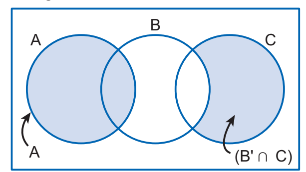
D) $D = \{9\} \Rightarrow B \cap D = \{9\}$

3.

I.	$7 \in (C \cap B) - A$	(F)
II.	$4 \in (C - A) \cup (B - A)$	(V)
III.	$6 \notin (A \triangle C) \cup B$	(F)
IV.	$3 \in (B \triangle A) \cap (A - C)$	(F)
V.	$4 \notin (A - C) \cap B$	(V)

Razonamiento y demostración

4. Del gráfico:



Se observa que la parte sombreada es:

$A \cup (B' \cap C)$

Clave C

5. Sea: $A \neq \varnothing$

$A = \{a_1; a_2; a_3; ...\}$

Si $A \subset P(A)$

$\Rightarrow a_1; a_2; a_3; ... \in P(A) \leftarrow$ (F) ...(1)

Se observa que (1) es falso porque:

$\{a_1\}; \{a_2\}; \{a_3\}; ... \in P(A)$, los elementos de P(A) son conjuntos.

Por lo tanto: $A = \varnothing$

Clave C

Resolución de problemas

6. $A = \left\{\frac{3|x| - 1}{5} \in \mathbb{Z}^+ / 16 \leq x^2 \leq 144\right\}$

Luego:

$16 \leq x^2 \leq 144$

$16 \leq |x|^2 \leq 144$

$4 \leq |x| \leq 12$

$11 \leq 3|x| - 1 \leq 35$

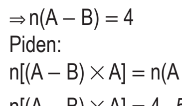
$2{,}2 \leq \frac{3|x| - 1}{5} \leq 7$

$\Rightarrow A = \{3; 4; 5; 6; 7\} \Rightarrow n(A) = 5$

$B = \{x \in \mathbb{Z}^+ / 5 < x \leq 6\}$

$\Rightarrow B = \{6\}$

Entonces: $A - B = \{3; 4; 5; 7\}$



$\Rightarrow n(A - B) = 4$
Piden:
$n[(A - B) \times A] = n(A - B) \, . \, n(A)$
$n[(A - B) \times A] = 4 \, . \, 5$
$\therefore n[(A - B) \times A] = 20$

Clave D

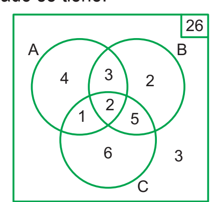
7. Sean A y B los conjuntos.

$n[P(A)] = 2^{n(A)}$
$n[P(B)] = 2^{n(B)}$
$n[P(A)] + n[P(B)] = 2^{n(A)} + 2^{n(B)}$ ...(1)
Dato: $n[P(A)] + n[P(B)] = 40$ ...(2)
Reemplazamos (2) en (1):
$\Rightarrow 2^{n(A)} + 2^{n(B)} = 40$
$\downarrow \quad \downarrow$
$32 \quad 8$
$2^5 \quad 2^3$

Nos piden la diferencia de los subconjuntos propios:
n.° subconjuntos propios de $A = 2^{n(A)} - 1 = 31$
n.° subconjuntos propios de $B = 2^{n(B)} - 1 = 7$
$\therefore 31 - 7 = 24$

Clave D

8. Del enunciado se tiene:



Piden:
$n(C') = n(U) - n(C)$
$n(C') = 26 - 14 = 12$
$\therefore n(C') = 12$

Clave E

9. Sea A el conjunto formado por las frutas diferentes:

$A = \{a_1; a_2; a_3; ...; a_n\} \Rightarrow n(A) = n$

El número de platos diferentes que se puede obtener es igual al número de sus subconjuntos propios de A:
$2^{n(A)} - 1 = 2^n - 1$ ...(1)
Piden: el número de platos que se puede obtener si se utiliza al menos dos frutas diferentes.
De (1), sacamos los subconjuntos unitarios que son n elementos, entonces:
$(2^n - 1) - n = 2^n - n - 1$
Por lo tanto, se pueden obtener $(2^n - n - 1)$ platos diferentes.

Clave A

10. $(2a + 3b; 9b - 7a) = (18; 15)$

$2a + 3b = 18$ ...(1)
$9b - 7a = 15$ ...(2)

Multiplicando (1) y (2) por 3 y –1 respectivamente:

$6a + 9b = 54$
$-9b + 7a = -15$ (+)
$13a = 39 \Rightarrow a = 3$

Reemplazando el valor de a en (1):
$2(3) + 3b = 18$
$3b = 12 \Rightarrow b = 4$
Por lo tanto: $a \, . \, b = 12$

Clave B

Nivel 2 (página 14) Unidad 1

Comunicación matemática

11. A) $\exists \, x \in A / \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$

B) $\forall x \in A; \, x + \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

C) $\exists \, x \in A / \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$

D) $\forall \, x \in A; \, \sqrt{x + 3}$ es un irracional

12.
I. $10 \in [B - (D \cap C)] - A$ (V)
II. $7 \in [C - D) \cap (A \, \Delta \, B)$ (V)
III. $\varnothing \notin (C \cap A) - B$ (V)
IV. $1 \in A \cap (D \cup C)$ (F)
V. $\{6; 7\} \subset (D \cap B) \cup [B - (A \cup D)]$ (V)

Razonamiento y demostración

13. La expresión más simple que representa la gráfica del enunciado es:
$(A' \cup B' \cup C') \cap D$

Clave A

14. I. (F)

No se cumple para: x = 13

$x = 13;$	$y = 4:$	$13 - 4 = 3$	(F)
$x = 13;$	$y = 8:$	$13 - 8 = 3$	(F)
$x = 13,$	$y = 12:$	$13 - 13 = 3$	(F)

II. (V)

$x = 7; \quad y = 8: \quad \frac{7 + 8}{5} \in \mathbb{Z}$

$x = 11; \quad y = 4: \quad \frac{11 + 4}{5} \in \mathbb{Z}$

$x = 13; \quad y = 12: \quad \frac{13 + 12}{5} \in \mathbb{Z}$

III. (F)

$x = 4;$	$y = 7:$	$4 - 7 > 0$	(F)
$x = 4;$	$y = 11:$	$4 - 11 > 0$	(F)
$x = 4;$	$y = 13:$	$4 - 13 > 0$	(F)

IV. (V)

$x = 4; \quad y = 7: \quad \frac{4 + 7 + 1}{2} \in \mathbb{Z}$

$x = 8; \quad y = 11: \quad \frac{8 + 11 + 1}{2} \in \mathbb{Z}$

$x = 12; \quad y = 13: \quad \frac{12 + 13 + 11}{2} \in \mathbb{Z}$

Resolución de problemas

15. Pueden ser verdaderas:

$A \subset B \Rightarrow A \neq B \vee A = B$ (V)
$A \cap B = A \neq \varnothing$ (F)

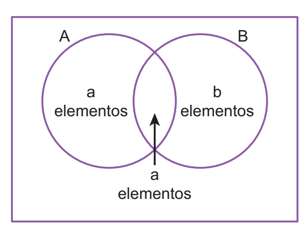
$A \subset B \Rightarrow B \not\subset A \vee B \subset A$ (V)
$A \cap B = A \neq \varnothing$ (V)
$A - B \neq \varnothing$ (F)
$B - A = \varnothing$; si $A = B$ (V)

Clave C

16. Sean A y B conjuntos

$(2^{n(A)} - 1) + (2^{n(B)} - 1) = 46$
Dato: $2^{n(A)} + 2^{n(B)} = 48$

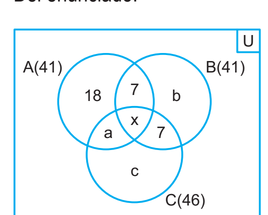
$\Rightarrow n(A) = 4 \wedge n(B) = 5$
Si: $n(A - B) = n(A \cap B)$



Luego:
$n(A) = 2a = 4 \Rightarrow a = 2$
$n(B) = a + b = 5 \Rightarrow b = 3$
$\Rightarrow n(A \cup B) = 7$
Piden: $n[P(A \cup B)] = 2^{n(A \cup B)} = 2^7 = 128$

Clave A

17. Del enunciado:

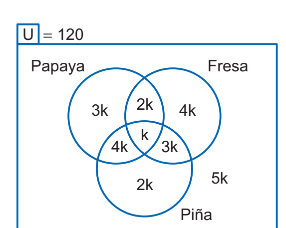


Luego:
$b + x + 7 + 7 = 41 \Rightarrow b + x = 27$ ...(1)
$a + c + x + 7 = 46 \Rightarrow a + c + x = 39$ ...(2)
Sumando (1) y (2):
$a + b + c + 2x = 66$ ...(3)

Además:
$a + b + c + x + 7 + 18 + 7 = 93$
$a + b + c + x = 61$ ...(4)
Restando (4) y (3): $x = 5$
$\therefore n[(A^C \cup B^C \cup C^C)^C] = x = 5$

Clave A

18.



Luego:

$3k + 2k + 4k + 4k + k + 3k + 2k + 5k = 120$

$24k = 120$

$k = 5$

Piden:

$3k + 4k + 2k = 9k = 9(5) = 45$

Clave E

19.

Años	27	28	
V	a	b	4
M	13	6	6

Dato: total = 34

Del enunciado se deduce que no tienen 27 ni 28 años:

$V = 4 \ \wedge \ M = 6$

Luego:

$10 + a + b + 19 = 34$

$29 + a + b = 34$

$\therefore \ a + b = 5$

Clave B

Nivel 3 (página 15) Unidad 1

Comunicación matemática

20. A) $\exists x \in B / \dfrac{x+1}{3} \in \mathbb{N}$

B) $\exists x \in B / \sqrt[3]{x+4} \in \mathbb{Q}$

C) $\forall x \in B, \dfrac{x}{n} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

D) $\forall x \in B, \dfrac{x^2 - 1}{8} \in \mathbb{Z}$

21. I. $6 \in (D - A) \cup [C \cap (A \cup B)]$ (V)

II. $\{\{\varnothing\}\} \subset C - [(A - B) \cap D)]$ (V)

III. $\varnothing \in (B - D) \cap (C \,\Delta\, D)$ (F)

IV. $10 \notin (C \cup A) \cap (A - D)$ (V)

V. $\{1; \{1\}\} \subset (A - C) \cup [C - (B \cup D)]$ (V)

Razonamiento y demostración

22. I. Si: $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$ (F), $B' \subset A'$

II. Si: $A = \{\varnothing\} \Rightarrow$ A tiene 2 subconjuntos (V)

n(A) = 1, n.° subconjuntos de A es:

$2^{n(A)} = 2^1 = 2$

III. Si: $M = \{0; 1\} \Rightarrow 1 \subset M$ (F), $1 \in M$

IV. $U = \varnothing^c$ (V)

Clave B

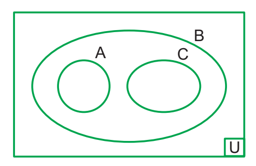
23. I. (F), pueden ser iguales.

II. (F)

III. (V)

IV. (F)

Como ejemplo veamos el siguiente gráfico B.



Clave B

Resolución de problemas

24. Sea A el conjunto de los sabores de helados.

A = {a; b; c; d; e}

Sea k: el número de por lo menos dos sabores.

n.° combinaciones de sabores

= n.° de subconjuntos propios de $A = 2^5 - 1 = 31$

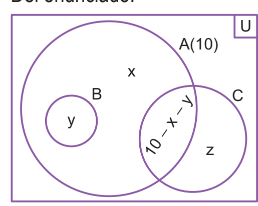
k = n.° combinaciones de sabores – n.° de un solo sabor

$\Rightarrow k = 31 - 5$

$\therefore k = 26$

Clave D

25. Del enunciado:



Además:

$n(B \times C) = 75$

$n(B) \,.\, n(C) = 75$

$y \,.\, z = 75$

$\Rightarrow y \neq 0 \wedge z \neq 0$ ...(1)

$n(A \cap C) < 10$

$10 - x - y < 10$

$0 < x + y$ ...(2)

Nos piden: $n[A - (B \cup C)]$; el menor posible.

Del gráfico: $n[A - (B \cup C)] = x$

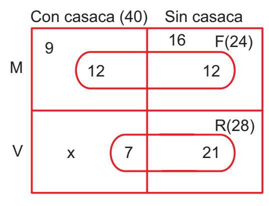
Como es el menor posible:

$\Rightarrow x = 0$

$\therefore n[A - [(B \cup C)] = 0$

Clave D

26. Del enunciado:



Entonces:

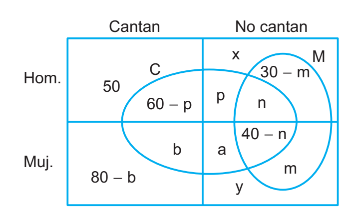
$x + 7 + 9 + 12 = 40$

$x + 28 = 40$

$\therefore x = 12$

Clave A

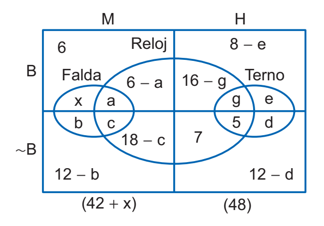
27. Del enunciado:



$\Rightarrow n + (40 - n) = 40$

Clave E

28. Del enunciado:



Además:

$M + H = 102$

$(42 + x) + 48 = 102$

$\therefore x = 12$

Clave B

29. $A = \left\{ \dfrac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} \,/\, x \in \mathbb{Z}, 0 < x \leq 6 \right\}$

$A = \{x + 5 \,/\, x \in \mathbb{Z}, 0 < x \leq 6$

Por extensión:

$5 < x + 5 \leq 11 \quad A = \{6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

Para B:

$\dfrac{3(-1)+1}{2} = -1 \in \mathbb{Z}$

$\dfrac{3(1)+1}{2} = 2 \in \mathbb{Z}$

$\dfrac{3(3)+1}{2} = 5 \in \mathbb{Z}$

$\dfrac{3(5)+1}{2} = 8 \in \mathbb{Z}$

$\dfrac{3(7)+1}{2} = 11 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow B = \{-1; 2; 5; 8; 11\}$

$(A \,\Delta\, B) = \{6; 7; 9; 10; 1; 2; 5\} \Rightarrow n(A \,\Delta\, B) = 7$

$(A \cap B) = \{8; 11\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

$n(A \,\Delta\, B) + n(A \cap B) = 7 + 2 = 9$

Clave A

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 17) Unidad 1

1. Para a:
$\overline{(a-1)(a+4)(a+8)}_{(11)}$

Se observa que:
$3 > a > 1 \Rightarrow a = 2$

Para b: $\overline{bb(b+7)(b-4)}_{(12)}$

Se observa que:
$4 \leq b < 5 \Rightarrow b = 4$
Dato:
$\overline{ab}_{(7)} + \overline{ba}_{(8)} = \overline{xy}$
$7a + b + 8b + a = \overline{xy}$
$8a + 9b = \overline{xy}$
$a = 2 \wedge b = 4$
$52 = \overline{xy}$
$\therefore x + y = 7$

Clave E

2. $460_{(m)} = 288_{(n)}$
$\Rightarrow 4m^2 + 6m + 0 = 2n^2 + 8n + 8$ ...(I)
$458_{(m)} = 284_{(n)}$
$\Rightarrow 4m^2 + 5m + 8 = 2n^2 + 8n + 4$ ...(II)

Restando (I) –(II): $m - 8 = 4$
$m = 12$

Reemplazando el valor de m en (I):
$\Rightarrow n = 16$
$\therefore m + n = 28$

Clave A

3.

• 250 ⌊8 → 250 = 8·31 + 2; 31 = 8·3 + 7 $\Rightarrow 372_{(8)}$

• 250 ⌊10 → 250 = 10·25 + 0; 25 = 10·2 + 5 $\Rightarrow 250_{(10)}$

• 250 ⌊14 → 250 − 14 = 110; 110 − 98 = 12; cociente 17; 17 − 14 = 3; cociente 1 $\Rightarrow 13(12)_{(14)}$

• 250 ⌊12 → 250 − 24 = 10; cociente 20; 20 − 12 = 8; cociente 1 $\Rightarrow 18(10)_{(12)}$

$\Rightarrow$ Solo hay 4 bases.

Clave A

4. Se tiene:
$\overline{xyz} = \overline{aaa}_{(7)} < 300$
$7^2a + 7a + a < 300$
$\overline{xyz} = 57\,a < 300$
$\downarrow$
2; 3; 4; 5
$\therefore$ 4 números

Clave C

5. $\overline{1a4} = 504_{(n)}$
$100 + 10a + 4 = 5 \cdot n^2 + 0 \cdot n + 4$
$100 + 10a = 5n^2$
$20 + 2a = n^2$
$2(10 + a) = n^2$

Luego: $2 \cdot \overline{1a} = n^2$
$\downarrow \quad \downarrow$
$8 \quad 6$
$\therefore a = 8$

Clave D

6.
$\overline{aab}_{(6)} = \overline{b1b} \Rightarrow a < 6 \ \wedge \ b < 6$
$a \cdot 6^2 + a \cdot 6 + b = 100b + 10 + b$
$42a = 100b + 10$
$21a = 50b + 5$
$\downarrow \quad \downarrow$
$5 \quad 2$
Piden: $a + b = 5 + 2$
$\therefore (a + b) = 7$

Clave A

7. $1331_{(m)} = 1000_{(n)}$
$\underbrace{1 \cdot m^3 + 3 \cdot m^2 + 3 \cdot m + 1}= 1 \cdot n^3$
$(m+1)^3 = n^3$
$\downarrow \quad \downarrow$
4 5
5 6
6 7
$\therefore (m + n)_{mín.} = 4 + 5 = 9$

Clave C

8. $\overline{4a6}_{(m)} = \overline{3n(n+1)}_{(8)}$ ...(I)
$\overline{4a6} > 3n(n+1) \Rightarrow m < 8$ ...(II)
De (I) y (II): $6 < m < 8 \Rightarrow m = 7$

Reemplazando m = 7 en (I):
$\overline{4a6}_{(7)} = \overline{3n(n+1)}_{(8)}$
$4 \cdot 7^2 + 7 \cdot a + 6 = 3 \cdot 8^2 + n \cdot 8 + n + 1$
$196 + 7a + 6 = 192 + 9n + 1$
$7a = 9\underbrace{(n-1)}$
$\downarrow \qquad \downarrow$
$0 \qquad 0$
$\Rightarrow a = 0 \ \wedge \ n = 1$
$\therefore a + m + n = 8$

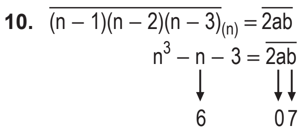
Clave A

9. $\overline{(a+1)b6}_{(x)} = \overline{abb}_{(8)}$ ...(1)
Como:
$\overline{(a+1)b6} > \overline{abb} \Rightarrow x < 8$ ...(2)
De (1) y (2): $6 < x < 8 \Rightarrow x = 7$
Reemplazando el valor de x en (1):
$\overline{(a+1)b6}_{(7)} = \overline{abb}_{(8)}$
$(a+1) \cdot 7^2 + b \cdot 7 + 6 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + b$
$49(a+1) + 7b + 6 = 64a + 9b$
$49a + 49 + 7b + 6 = 64a + 9b$
$55 = 15a + 2b$
$\downarrow \quad \downarrow$
$3 \quad 5$
$\Rightarrow a = 3 \ \wedge \ b = 5$
$\therefore a + b = 8$

Clave A

10. $\overline{(n-1)(n-2)(n-3)}_{(n)} = \overline{2ab}$

$n^3 - n - 3 = \overline{2ab}$



El sistema de numeración es: 6

Clave C

11. Se observa : $a < 7$; $b < 6$

$\overline{abb}_{(9)} = \overline{(b+1)(b+1)a}_{(7)}$

$a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + b = (b+1) \cdot 7^2 + (b+1) \cdot 7 + a$

$8a - 46b = 56$

$\downarrow \quad \downarrow$

$3 \quad\ 4$

$a = 3$; $b=4 \Rightarrow a + b = 7$

Clave C

12. $n + 8m = 2 \times 10^2$

$n + 8m = 200$

Se observa : $n > 8$

Como "m" es máximo: $m = 23$

$\therefore n = 16$

Clave A

13. $22 < \overline{a6} \Rightarrow 2 \leq \underbrace{a < 3}_{\text{Dato}} \Rightarrow a = 2$

$203_{(\overline{2b})} = \overline{1(22)5}_{(26)}$

$2(\overline{2b})^2 + 3 = 1.26^2 + 22 \cdot 26 + 5$

$2(\overline{2b})^2 = 26^2 + 22 \cdot 26 + 2$

$2(\overline{2b})^2 = 1250$

$(\overline{2b})^2 = 625 = 25^2$

$\Rightarrow b = 5$

Nos piden:

$\overline{ab}_{\overline{ab}_{(8)}} = 25_{25_{(8)}} = 25_{(21)} = 47$

Clave D

14. $\overline{ab}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}}} \times \overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}} = 12_{(7)} \times 7$

Luego:

$\overline{ab} = 12$

$a = 1$; $b = 2$

$\overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}} = 12_{12_{(c)}} = 7$

$\Rightarrow c = 3$

$\therefore a + b + c = 6$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 19) Unidad 1

Comunicación matemática

1. Del enunciado, el conjunto A es unitario, además $a > 2$, entonces:

$\overline{(2a)(2a)(2a)}_{(8)} = \overline{a06}_{(b+1)}$

$\downarrow$

3

$\Rightarrow 666_{(8)} = 306_{(b+1)}$

$6 \times 8^2 + 6 \times 8 + 6 = 3(b+1)^2 + 6$

$432 = 3(b+1)^2$

$144 = (b+1)^2$

$12 = b + 1$

$11 = b$

Luego:

I. F II. F III. F

2. Son números diferentes de 22:

$221_{(3)}$; $18_{(9)}$; $22_{(9)}$

$44_{(4)}$; $201_{(3)}$

3. Expresamos 19 y $102_{(3)}$ en base 6

- $19 \,\underline{|\,6}$ → cociente 3, residuo 1
- $102_{(3)} = 11 \,\underline{|\,6}$ → cociente 1, residuo 5

$19 = 31_{(6)}$ $102_{(3)} = 15_{(6)}$

Luego:

$\boxed{19} = \boxed{31_{(6)}} = 3 + 2(1) = 5$

$\boxed{102_{(3)}} = \boxed{15_{(6)}} = 1 + 2(5) = 11$

Por lo tanto:

$\boxed{19} + \boxed{102_{(3)}} = 5 + 11 = 16$

Clave D

Razonamiento y demostración

4. I. V

$\overline{1p}_{(n)} + \overline{1q}_{(n)} = 34$

$n + p + n + q = 34$

$2n + p + q = 34$; $p < n$; $q < n$

Además; de la igualdad $\overline{abc}_{(d)} = \overline{nn}$; n es una cifra (menor que 10).

Entonces:

$2n + \underbrace{p + q}_{16 \text{ máx.}} = 34$

$\downarrow$

9

$\Rightarrow n = 9$

II. V

$\overline{(2a)(3b+3)}_{(7)} = 48$

$\overline{(2a)(3b+3)}_{(7)} = 49 - 1$

$\overline{(2a)(3b+3)}_{(7)} = 7^2 - 1$

$\overline{(2a)(3b+3)}_{(7)} = 66_{(7)}$

$\Rightarrow 2a = 6 \;\wedge\; 3b + 3 = 6$

$a = 3 \qquad b = 1$

Luego: $a + b = 3 + 1 = 4$

III. V

$\overline{aa00}_{(b)} = 80$

$\overline{aa}_{(b)} \times b^2 = 16 \times 5$

$\overline{aa}_{(b)} \times b^2 = 4^2 \times 5$

$\overline{aa}_{(4)} = 5$

$4a + a = 5$

$5a = 5$

$a = 1$

$\Rightarrow a^2 = 1^2 = 1$

5.

$\left.\begin{matrix}\overline{1a}_{\overline{1a}_{\ddots_{\overline{1a}}}}\end{matrix}\right\}$ a veces $= \overline{bc}$; $0 < a < 10$

$10 + a \times a = \overline{bc}$

$10 + a^2 = \overline{bc}$

Entonces:

$a = 1$: $\overline{bc} = 11$

$a = 2$: $\overline{bc} = 14$

$a = 3$: $\overline{bc} = 19$

$a = 4$: $\overline{bc} = 26$

$a = 5$: $\overline{bc} = 35$

$a = 6$: $\overline{bc} = 46$

$a = 7$: $\overline{bc} = 59$

$a = 8$: $\overline{bc} = 74$

$a = 9$: $\overline{bc} = 91$

Luego: I. V II. V III. F

Clave C

Resolución de problemas

6. $\overline{abcd} = 2 \times \overline{ab} \times \overline{cd}$

$\Rightarrow 100\overline{ab} + \overline{cd} = 2 \times \overline{ab} \times \overline{cd}$

$a = 1$

$b = 3$

$c = 5$

$d = 2$

Piden: $E = \overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\overline{1d}_{(c+d)}}}}$

$\overline{1d}_{(c+d)} = 12_{(7)} = 9$

$\overline{1c}_{(9)} = 15_{(9)} = 14$

$\overline{1b}_{(14)} = 13_{(14)} = 17$

$\overline{1a}_{(17)} = 11_{(17)} = 18$

Clave E

7. $E = 3n^6 - 3n^5 + 2n^3 + 3n - 2$

$E = 2.n^6 + (n-3).n^5 + 0.n^4 + 2.n^3 + 0.n^2 + 2.n + (n-2)$

Luego, E se puede expresar como:

$E = \overline{2(n-3)0202(n-2)}_{(n)}$

Por dato:

$2 + (n-3) + 2 + 2 + (n-2) = 17$

$2n + 1 = 17$

$\therefore n = 8$

Clave C

8. Por dato, los numerales están correctamente escritos.

$\overline{ab}_{(n)}$; $\overline{m34}_{(c+1)}$; $\overline{pcc}_{(a)}$; $\overline{(n+3)pm}$

Entonces:

$3 < c < a < n < 7$

$\;\;\;\;\;\;\downarrow\;\;\;\downarrow\;\;\;\downarrow$

$\;\;\;\;\;\;4\;\;\;5\;\;\;6$

$\therefore a + n - c = 5 + 6 - 4 = 7$

Clave D

9. $\overline{\left(\frac{15}{m}\right)\left(\frac{6}{m}\right)\left(\frac{9}{m}\right)}_{(7)} = \overline{(m-1)(m-3)(m-1)(5-m)}_{(n)}$

De los numerales:

$5 - m \geq 0 \;\wedge\; m - 3 \geq 0$

$5 \geq m \qquad m \geq 3$

Entonces: $3 \leq m \leq 5$

Además, como m divide a 15; 6 y 9:

$\Rightarrow m = 3$

Reemplazando en los numerales:

$523_{(7)} = 2022_{(n)}$

Por descomposición polinómica:

$5 . 7^2 + 2 . 7 + 3 = 2 . n^3 + 2 . n + 2$

$260 = 2n^3 + 2n$

$130 = n(n^2 + 1)$

$5 . 26 = n(n^2 + 1)$

$5 . (5^2 + 1) = n(n^2 + 1)$

$\Rightarrow n = 5$

$\therefore m + n = 8$

Clave D

10. Por dato: $850 = \overline{2a2a}_{(n)}$

Descomponiendo en bloques:

$850 = \overline{2a}_{(n)} . n^2 + \overline{2a}_{(n)} = \overline{2a}_{(n)}(n^2 + 1)$

$17 . 50 = \overline{2a}_{(n)}(n^2 + 1)$

$\Rightarrow n = 7 \;\wedge\; 17 = \overline{2a}_{(7)} = 2 . 7 + a$

$\Rightarrow a = 3$

$\therefore a + n = 10$

Clave C

Nivel 2 (página 19) Unidad 1

Comunicación matemática

11. $100_{(2)}$; $21_{(3)}$; $13_{(5)}$

12. Del enunciado, el conjunto A tiene dos elementos, los cuales son:

- $\overline{50(x-1)}_{(a)} = \overline{x6a}_{(b)} \Rightarrow a < b$
- $\overline{(a-6)4(b+1)2}$

En el 2.° numeral se observa:

$a - 6 > 0 \quad \wedge \quad b + 1 < 10$

$a > 6 \qquad\qquad b < 9$

Entonces:

$6 < a < b < 9$

$\;\;\;\;\;\downarrow\;\;\;\downarrow$

$\;\;\;\;\;7\;\;\;8$

Luego: $\overline{50(x-1)}_{(7)} = \overline{x67}_{(8)}$

$5 \times 7^2 + x - 1 = x \times 8^2 + 6 \times 8 + 7$

$244 + x = 64x + 55$

$\Rightarrow 63x = 189$

$x = 3$

Por lo tanto:

I. V II. F III. F

Observación:

$\overline{(a-6)4(b+1)2} \neq \overline{50(x-1)}_{(a)}$

$\overline{(a-6)4(b+1)2} \neq \overline{x6a}_{(b)}$

Ya que, como $a < 10$ y $b < 10$, no se cumplen:

$\overline{(a-6)4(b+1)2} < \overline{50(x-1)}$

$\overline{(a-6)4(b+1)2} < \overline{x6a}$

Razonamiento y demostración

13. I. V

En el numeral $\overline{xyx}_{(2)}$: $x > 0$

$\Rightarrow \overline{xyx}_{(2)} = \overline{1y1}_{(2)}$

Como es un numeral en base par, cuya última cifra es impar, entonces,expresado en el sistema decimal. Será un número impar.

II. F

$\overline{ab}_{(c)}^{\overline{b00}_{(a)}} = 6561$

$\overline{ab}_{(c)}^{\overline{b00}_{(a)}} = 9^4$

De donde:

$\overline{ab}_{(c)} = 9$; $\overline{b00}_{(a)} = 4$

$\overline{b00}_{(a)} = 100_{(2)}$

$\Rightarrow a = 2; b = 1$

Luego: $21_{(c)} = 9$

$2c + 1 = 9$

$c = 4$

Por lo tanto: $\frac{\overline{bac}}{c} = \frac{124}{4} = 31$

III. V

$\overline{(r^2)r}_{(n)} + \overline{xy} = \overline{abc}$

$\Rightarrow r < n; r^2 < n$

Luego, el numeral $\overline{pq(r^2)}_{(n)}$ está bien escrito, y se cumple:

$n^2 \leq \overline{pq(r^2)}_{(n)} < n^3$

$\Rightarrow \overline{pq}_{(n)} \times n + r^2 < n^3$

$\overline{pq}_{(n)} < \frac{n^3 - r^2}{n}$

$\therefore \overline{pq}_{(n)} < n^2 - \frac{r^2}{n}$

14. I. F

Descomponemos polinómicamente:

$\overline{ab}_{(5)} \times (5^2 + 1) = \overline{pqr}$

$26\overline{ab}_{(5)} = \overline{pqr}$

Luego:

$10_{(5)} \leq \overline{ab}_{(5)} \leq 44_{(5)}$

$5 \leq \overline{ab}_{(5)} \leq 24$

$130 \leq 26\overline{ab}_{(5)} \leq 624$

$130 \leq \overline{pqr} \leq 624$

Si $\overline{pqr}$ es máximo, entonces:

$p + q + r = 6 + 2 + 4 = 12$

II. V

Si $p = 6$, entonces:

$26\overline{ab}_{(5)} = \overline{6qr}$

Luego:

$600 \leq 26\overline{ab}_{(5)} \leq 699$

$23{,}07 \leq \overline{ab}_{(5)} \leq 26{,}88$

$24 \leq \overline{ab}_{(5)} \leq 26 \quad ... (\alpha)$

Además:

$5 \leq \overline{ab}_{(5)} \leq 24 \quad ... (\beta)$

De (α) y (β):

$\overline{ab}_{(5)} = 24$

$\overline{ab}_{(5)} = 44_{(5)}$

$a + b = 4 + 4 = 8$

III. V

$\sqrt{\frac{\overline{pqr}}{2}} = \overline{mn}$

$\sqrt{\frac{26\overline{ab}_{(5)}}{2}} = \overline{mn}$

$\sqrt{13\overline{ab}_{(5)}} = \overline{mn}$

$\underbrace{13\overline{ab}_{(5)}}_{13} = \overline{mn}^2$

$\Rightarrow \overline{ab}_{(5)} = 13$

$\overline{ab}_{(5)} = 23_{(5)}$

También: $\overline{mn} = 13$

Por lo tanto: $b = n = 3$

Clave D

Resolución de problemas

15. Por dato:

$\overline{abc} = \overline{n(4n)(2n)(4n)}_{(5)} \quad ...(1)$

$\Rightarrow (4n) < 5 \Rightarrow n = 1$

Reemplazando en (1):

$\overline{abc} = 1424_{(5)} = 239$

$\Rightarrow a = 2; b = 3$ y $c = 9$

Luego:

$E = \underbrace{222...22_{(3)}}_{(2\,.\,3)^2 = 36 \text{ cifras}} = \underbrace{(22_{(3)})(22_{(3)})...(22_{(3)})_{(9)}}_{18 \text{ cifras}}$

$E = \underbrace{888...88_{(9)}}_{18 \text{ cifras}}$

$\therefore \Sigma\text{cifras} = 8 \times 18 = 144$

Clave C

16. Por dato:

$a = \underbrace{88...87_{(9)}}_{2000 \text{ cifras}}$

$\Rightarrow a + 1 = \underbrace{88...88_{(9)}}_{2000 \text{ cifras}}$

Por propiedad:

$a + 1 = 9^{2000} - 1$

$\Rightarrow a = 9^{2000} - 2$ ...(1)

Además: $b = 148_{(a)}$

Por descomposición polinómica:

$b = 1 \,.\, a^2 + 4 \,.\, a + 8$

$b = (a + 2)^2 + 4$ ..(2)

Reemplazando (1) en (2):

$b = (9^{2000} - 2 + 2)^2 + 4$

$b = 9^{4000} + 4 = 1 \,.\, 3^{8000} + 1 \,.\, 3 + 1$

Luego, b en base 3:

$b = \underbrace{1000...0011}_{\text{8001 cifras}}{}_{(3)}$

$\therefore$ Σcifras de b es: 3

Clave A

17. Piden:

$M = \overline{3ab}_{(6)} + \overline{4b2}_{(a)} + 23_{(b)}$ ...(1)

Se observa:

$3 < b < a < 6 \Rightarrow a = 5 \wedge b = 4$

Reemplazando los valores de a y b en (1):

$M = 354_{(6)} + 442_{(5)} + 23_{(4)}$

$M = (3 \,.\, 6^2 + 5 \,.\, 6 + 4) + (4 \,.\, 5^2 + 4 \,.\, 5 + 2) + (2 \,.\, 4 + 3)$

$\therefore M = 275$

Clave D

18. $\overline{abc}_{(3m)} = \overline{(n-1)(n^2)(n)}_{(3n)}$ ...(1)

De (1):

$n - 1 > 0 \quad \wedge \quad n^2 < 3n$

$n > 1 \quad \wedge \quad n < 3 \Rightarrow n = 2$

Reemplazando n = 2 en (1):

$\overline{abc}_{(3m)} = 142_{(6)}$

$\overline{abc}_{(3m)} = 1 \,.\, 6^2 + 4 \,.\, 6 + 2$

$\overline{abc}_{(3m)} = 62$ ...(2)

Como:

$\overline{abc} > 62 \Rightarrow 3m < 10$

$m < 3{,}3...$

Luego: $m \in \{1; 2; 3\}$

- Si m = 1

$\Rightarrow \overline{abc}_{(3)} = 62$

```
62 |3
60  20 |3
 ②  18   6 |3
     ②   6  2
         ⓪
```

$\Rightarrow \overline{abc}_{(3)} = 2022_{(3)}$ (no cumple)

Si m = 2

$\Rightarrow \overline{abc}_{(6)} = 62$

$\overline{abc}_{(6)} = 62 = 142_{(6)}$

$\Rightarrow a = 1; b = 4$ y $c = 2$

Si m = 3

$\Rightarrow \overline{abc}_{(9)} = 62 = 68_{(9)}$ (no cumple)

$\therefore a + b + c + m + n = 11$

Clave B

19. Del enunciado:

$122_{(a)} = 101_{(b)} = 72_{(c)}$ ...(1)

De (1):

$2 < a;\ 1 < b;\ 7 < c$

Además: $a < b < c$ (a mayor numeral aparente menor es la base).

De (1):

- $a^2 + 2a + 2 = b^2 + 1$
  $(a + 1)^2 = b^2 \Rightarrow b = a + 1$ ...(2)
- $b^2 + 1 = 7c + 2$
  $b^2 = 7c + 1 \Rightarrow b^2 = 64$
  $\downarrow \qquad \Rightarrow b = 8$
  (mín.) 9

Reemplazando b = 8 en (2): a = 7

$\therefore (a + b + c)_{mín.} = 24$

Clave A

20. Por dato:

$\overline{\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{m+2}\right)\left(\frac{k}{m+4}\right)}_{(15)} = \overline{ab9c}_{(k-2)}$ ...(1)

De (1):

$9 < k - 2 \Rightarrow k > 11$ ...(2)

De (1), sabemos que a mayor numeral aparente menor es la base.

$\Rightarrow 15 > k - 2 \Rightarrow k < 17$ ...(3)

De (2) y (3):

$k = \{12; 13; 14; 15; 16\}$ ...(4)

Además de (1), k es divisible por:

m; (m + 2); (m + 4) ...(5)

Los valores de k y m que satisfacen (4) y (5) son:

$(k = 12 \text{ y } m = 2) \vee \underbrace{(k = 15 \text{ y } m = 1)}_{\text{No verifica (1); } \frac{k}{m} = 15}$

$\Rightarrow k = 12 \wedge m = 2$

Reemplazando en (1):

$\overline{\left(\frac{12}{2}\right)\left(\frac{12}{4}\right)\left(\frac{12}{6}\right)}_{(15)} = \overline{ab9c}_{(10)}$

$632_{(15)} = \overline{ab9c}_{(10)}$

$1397 = \overline{ab9c}_{(10)}$

$\Rightarrow a = 1; b = 3$ y $c = 7$

$\therefore a + b + c + m + k = 25$

Clave D

Nivel 3 (página 20) Unidad 1

Comunicación matemática

21. Por dato:

$\overline{bab}_{(c)} = \overline{cb}_{(7)} = \overline{aac}_{(4)}$

$\Rightarrow b < c < 4;\ a > 0$

Además:

$\overset{+}{\underset{-}{\overline{bab}_{(c)}}} = \overset{-}{\underset{+}{\overline{aac}_{(a)}}}$

$\Rightarrow b > a$ (ya que $c > b$)

Luego:

$0 < a < b < c < 4$

$\quad\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\quad\ 1 \quad 2 \quad 3$

Por lo tanto:

I. V II. V III. F

22. De la figura se puede observar:

$\overline{aa}_{(7)} < \overline{ab}_{(7)};$

$7a + a < 7a + b$

$a < b$

También:

$\overline{c(4c)}_{(a)} = 14_{(a)}$

$\downarrow$

1 ✓

2 ✗ (a < 7)

$\Rightarrow 4 < a$

Luego: $4 < a < b < 7$

$\qquad\qquad\ \downarrow \quad \downarrow$

$\qquad\qquad\ 5 \quad 6$

Por lo tanto: I. V II. F III. V

Razonamiento y demostración

23. $\overline{(11)(r^2)}_{(13)} = \overline{pq(r^2)}_{\overline{pq}_{\overline{pq}(n)}}$

$(11)0_{(13)} = \overline{pq0}_{\overline{pq}_{\overline{pq}_{(n)}}}$

$11 \times 13 = \overline{pq}_{\overline{pq}_{\overline{pq}}} \times \overline{pq}_{\overline{pq}_{(n)}}$

Luego:

$11 = \overline{pq}_{\overline{pq}_{(n)}}$

$13 = \overline{pq}_{\overline{pq}_{\overline{pq}_{(n)}}}$

$13 = \overline{pq}_{(11)}$

$13 = 11p + q$

$\qquad\quad \downarrow \quad \downarrow$

$\qquad\quad 1 \quad 2$

Entonces:

$11 = 12_{12_{(n)}}$

$11 = n + 4$

$\Rightarrow n = 7$

Por lo tanto:

$\overline{(11)(r^2)}_{(13)} = \overline{12(r^2)}_{12_{12_{(7)}}}$

$\overline{(11)(r^2)}_{(13)} = \overline{12(r^2)}_{(11)}$

r: 0; 1; 2; 3

I. F II. V III. V

Clave D

24. I. V

$\overline{mn00}_{(p)} = 187 - \overline{mn}_{(p)}$

$\overline{mn00}_{(p)} + \overline{mn}_{(p)} = 187$

$\overline{mn}_{(p)} \times p^2 + \overline{mn}_{(p)} = 187$

$\overline{mn}_{(p)}(p^2 + 1) = 11 \times 17$

$\Rightarrow p^2 + 1 = 17 \quad \overline{mn}_{(p)} = 11$

$p = 4 \qquad \overline{mn}_{(4)} = 11$

$\overline{mn}_{(4)} = 23_{(4)}$

$m = 2; n = 3$

Entonces: $p + m + n = 4 + 2 + 3 = 9$

Luego: $\overline{ab}_{(k)} = 9$

$k \leq 9 < k^2$

$\Rightarrow k \leq 9 \ \wedge \ \sqrt{9} < k$

$3 < k$

$\Rightarrow 3 < k \leq 9$

4; 5; 6; 7; 8; 9

Hay 6 sistemas de numeración en el que 9 se expresa como un numeral de 2 cifras.

II. F

$\overline{ba00}_{(\overline{ab})} = 5239$

$\overline{ba} \times \overline{ab}^2 = 31 \times 13^2$

$\Rightarrow a = 1; b = 3$

Luego:

$\overline{mn}_{\overline{1n}_{\overline{1n}_{\overline{1n}_{(m)}}}} = \overline{mn}_{(m+3n)}$

Como n es base, entonces: $m > 1$

Hallamos el menor valor de $\overline{mn}_{(m+3n)}$:

$m = 2; n = 0$: $\overline{mn}_{(m+3n)} = 20_{(2)} = 4$ ✗

$m = 2; n = 1$: $\overline{mn}_{(m+3n)} = 21_{(5)} = 11$ ✓

III. F

Del enunciado:

$n = \dfrac{m + n^2}{2n}$

$2n^2 = m + n^2$

$n^2 = m$

Luego: $18(21)_{(n^2)} = \overline{a13bc}_{(n)}$

Por cambio de base especial:

a	13	bc
a	n + 3	nb + c
↓	↓	↓
1	8	(21)

$\Rightarrow a = 1; n + 3 = 8; \quad nb + c = 21$

$n = 5 \quad 5b + c = 21$

$\downarrow \ \downarrow$

$4 \ \ 1$

Por lo tanto:

$a + b + c + n = 1 + 4 + 1 + 5 = 11$

Clave A

Resolución de problemas

25. Por dato:

$\overline{ab4}_{\overline{ab}_{(c)}} = \overline{(\overline{ab}_{(c)})4}_{(7)} \qquad ...(1)$

Además: $a \neq b$

De (1):

$a < c \ \wedge \ b < c \quad ...(2)$

También:

$4 < \overline{ab}_{(c)} < 7$

$4 < a \,.\, c + b < 7$

$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow$

$1 \ \ 3 \ \ 2$

$\Rightarrow$ $a = 1$; $c = 3$; $b = 2$, son los valores que satisfacen (1) y (2).

$\therefore a + b + c = 6$

Clave D

26. Por dato: $\overline{11ab22}_{(3)} = \overline{x7y}_{(9)}$

$\Rightarrow a < 3 \ \wedge \ b < 3$

Descomponiendo en bloques:

$11_{(3)} \,.\, 3^4 + \overline{ab}_{(3)} \,.\, 3^2 + 22_{(3)} = \overline{x7y}_{(9)}$

$(4) \,.\, 9^2 + (\overline{ab}_{(3)}) \,.\, 9 + 8 = \overline{x7y}_{(9)}$

$\overline{4(\overline{ab}_{(3)})8}_{(9)} = \overline{x7y}_{(9)}$

Entonces:

$x = 4; y = 8 \wedge \overline{ab}_{(3)} = 7$

$3a + b = 7$

$\downarrow \quad \downarrow$

$2 \quad 1$

$\therefore a + b + x + y = 2 + 1 + 4 + 8 = 15$

Clave B

27. $\overset{-}{\overline{23m}}_{\underset{+}{(\overline{n3})}} = \overset{+}{\overline{ab4}}_{\underset{-}{(10)}} \qquad ...(1)$

Por numeral aparente:

$n = 1 \ \wedge \ 2 < a$

Reemplazando en (1):

$\overline{23m}_{(13)} = \overline{ab4}$

Por descomposición polinómica:

$2 \,.\, 13^2 + 3 \,.\, 13 + m = \overline{ab4}$

$377 + m = \overline{ab4}$

$\downarrow$

$377 + 7 = 384$

$\Rightarrow m = 7; a = 3 \ y \ b = 8$

Piden:

$m + n + b + a = 7 + 1 + 8 + 3$

$\therefore m + n + b + a = 19$

Clave B

28. $\overset{+}{\overline{a(a-1)7}}_{\underset{-}{(c)}} = \overset{-}{\overline{(a-1)(a+1)(c-1)}}_{\underset{+}{(10)}}$

Como c es base: $7 < c$

Por numeral aparente: $c < 10$

Entonces: $7 < c < 10 \Rightarrow c \in \{8; 9\}$

- Si: $c = 8$

$\overline{a(a-1)7}_{(8)} = \overline{(a-1)(a+1)7}$

Empleando la descomposición polinómica y agrupando términos, se obtiene:

$38a = 82 \Rightarrow a = \dfrac{41}{19}$ (no es una cifra)

- Si $c = 9$

$\overline{a(a-1)7}_{(9)} = \overline{(a-1)(a+1)8}$

Empleando la descomposición polinómica y agrupando términos, se obtiene:

$20a = 80 \Rightarrow a = 4$ (es una cifra)

$\therefore a \times c = 4 \times 9 = 36$

Clave C

29. Por dato:

$\overline{m(2m)0n}_{(8)} = \overline{(n+2)(\overline{aa})(n-4)}_{(m^4-4)} \ ...(1)$

Además: $\overline{ama} = \overline{...b}_{(n)} \qquad ...(2)$

De (1): $m = 2 \ \vee \ m = 3$

Si: $m = 2$

$\overline{240n}_{(8)} = \overline{(n+2)(\overline{aa})(n-4)}_{(2^4-4)}$

$\overline{240n}_{(8)} = \overline{(n+2)(\overline{aa})(n-4)}_{(12)}$

$\Rightarrow \overline{aa} < 12 \Rightarrow a = 1$

Luego:

$\overline{240n}_{(8)} = \overline{(n+2)(11)(n-4)}_{(12)}$

Por descomposición polinómica y efectuando:

$1280 + n = 144n + 288 + 132 + n - 4$

$\Rightarrow n = 6$

Si: $m = 3$, (1) no cumple.

Reemplazando en (2):

$\overline{ama} = 121 = \overline{...b}_{(6)}$

$121 \ \underline{|6}$

① $20 \ \underline{|6}$

② ③

$\Rightarrow 121 = 321_{(6)} = \overline{...b}_{(6)}$

$\therefore b = 1$

Clave B

30. Por dato:

$\overline{abaa}_{(8)} = \overline{ccba}_{(12)} \qquad ...(1)$

Además: $a \neq b \neq c$

De (1) se deduce: $a > c$

Por descomposición polinómica:

$a \,.\, 8^3 + b \,.\, 8^2 + a \,.\, 8 + a = c \,.\, 12^3 + c \,.\, 12^2 + b \,.\, 12 + a$

Ordenando términos:

$520 \,.\, a + 52 \,.\, b = 1872 \,.\, c$

$10 \,.\, a + b = 36 \,.\, c$

$\overline{ab} = 36 \,.\, c$

$\downarrow\downarrow \qquad \downarrow$

$36 \qquad 1$

$72 \qquad 2$ (no cumple $b \neq c$)

$\therefore a + b + c = 10$

Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 21) Unidad 1

1.

$$\begin{array}{r} {}^{1\ 1} \\ \overline{a83}\ + \\ \overline{5b9} \\ \overline{64c} \\ \hline 1659 \end{array}$$

- $3 + 9 + c = ...9$
  $12 + c = ...9 \Rightarrow c = 7$
- $8 + b + 4 + 1 = ...5$
  $13 + b = ...5 \Rightarrow b = 2$
- $a + 5 + 6 + 1 = 16$
  $a + 12 = 16 \Rightarrow a = 4$

$\therefore a + b + c = 13$

Clave C

2. $\overline{ab4} - \overline{1ab} = \overline{bc3}$

$100a + 10b + 4 - (100 + 10a + b) = 100b + 10c + 3$

$90a + 9b - 96 = 100b + 10c + 3$

$90a - 99 = 91b + 10c$

$10(9a - c) = 91b + 99$

$\downarrow$ (b = 1)

$10(9a - c) = 190$

$9a - c = 19$

$\downarrow\ \downarrow$ (a = 3, c = 8)

$\therefore a + b + c = 12$

Clave B

3. Del enunciado:

- $\underbrace{M + S + D}_{2M} = 19\,456$
  $2M = 19\,456$
  $M = 9728$ ...(1)
- $M = 4S$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$\therefore S = 2432$

Clave D

4. Por dato:

$C.A.(\overline{ab}) + C.A.(\overline{abab}) = 3674$

$100 - \overline{ab} + 10\,000 - \overline{abab} = 3674$

$10\,100 - \overline{ab} - \overline{ab}\,.\,101 = 3674$

$6426 = 102\,.\,\overline{ab}$

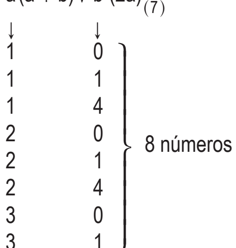
$\overline{ab} = 63$

$\Rightarrow a = 6 \wedge b = 3$

$\therefore a + b = 9$

Clave B

5. $\overline{a(a+b)\sqrt{b}\,(2a)}_{(7)}$



Por lo tanto:
Existen 8 números.

Clave D

6. Por dato:

$57N = ...718$ (–)

$44N = ...256$

$13N = ...462$

Luego: $\Rightarrow 2(13N = ...462)$

$26N = ...924$

$\therefore \sum$ cifras $= 9 + 2 + 4 = 15$

Clave E

7. Colocamos la suma en forma vertical:

$$\left.\begin{array}{r} 8\ + \\ 88 \\ 888 \\ 8888 \\ \vdots \\ (27\ \text{cifras}) \Rightarrow 8...8888 \end{array}\right\}\ 27\ \text{sumandos}$$

$$\overline{...abc}$$

En las unidades: $8(27) = 216$

$\Rightarrow$ colocamos 6 y llevamos 21 $\Rightarrow c = 6$

En las decenas: $\underbrace{21}_{\text{llevo}} + \underbrace{8(26)}_{26\ \text{sumandos}} = 229$

$\Rightarrow$ colocamos 9 y llevamos 22 $\Rightarrow b = 9$

En las centenas: $\underbrace{22}_{\text{llevo}} + \underbrace{8(25)}_{25\ \text{sumandos}} = 222$

$\Rightarrow$ colocamos 2 y llevamos 22 $\Rightarrow a = 2$

Piden: $a + b + c = 2 + 9 + 6 = 17$

Clave D

8. $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{3xy}$

Por propiedad:

$x = 9$

$3 + y = 9 \Rightarrow y = 6$

$a - c = 3 + 1 \Rightarrow a - c = 4$ ...(I)

Además:

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1} \\ abc\ + \\ cba \\ \hline 1352 \end{array}$$

$1 + 2b = 15 \Rightarrow b = 7$

Además: $a + c = 12$ ...(II)

De (I) y (II): $a = 8 \wedge c = 4$

Piden: $2a + b + c = 2(8) + 7 + 4 = 27$

Clave E

9. Sea el número: $N = \overline{abc}$

$$\begin{array}{l|l} N & 23 \\ \hline r & q \end{array}$$

$\Rightarrow N = 23q + r$

$N = 23q + 2q$

$N = 25q$

Por dato: $r = 2q$

Sabemos:

$d > r$

$23 > 2q$

$11{,}5 > q$

Además:

$N > 99$

$25q > 99 \Rightarrow q > 3{,}96$

Entonces: $3{,}96 < q < 11{,}5$

$\hookrightarrow \underbrace{4;\ 5;\ 6;\ ...;\ 11}_{8\ \text{valores}}$

$\therefore$ Existen 8 números.

Clave D

10. Del enunciado:

$$\begin{array}{r} N\ \times \\ \underline{(3a)\ a(2a)} \\ (2a)\ (N)\ + \\ a\,N \\ \underline{(3a)\ N} \\ (6a)(N) = 4206 \end{array}$$

$\Rightarrow a = 1;\ 2;\ 3$

$aN = 701 \Rightarrow N = 701$

$\downarrow$

1

Reemplazando los valores y efectuando la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 701\ \times \\ \underline{312} \\ 1402 \\ 701 \\ \underline{2103} \\ 218712 \end{array}$$

Producto total

Piden la suma de cifras del producto total:
$2 + 1 + 8 + 7 + 1 + 2 = 21$

Clave D

11. Por dato:

$\overline{a\ b\ a}_{(n)}$; $\overline{m\ p\ m}_{(c)}$

a	b	m	p
↓	↓	↓	↓
1	0	1	0
2	1	2	1
⋮	⋮	⋮	⋮
(n – 1)	(n – 1)	(c – 1)	(c – 1)
(n – 1) . n		(c – 1) . c	

Del enunciado:

- $(n - 1)n - c(c - 1) = 42$ ...(1)
- $n + c = 15$ ...(2)

De (1):

$n^2 - n - c^2 + c = 42$

$n^2 - c^2 - (n - c) = 42$

$(n - c)[n + c - 1] = 42$ ...(3)

Reemplazando (2) en (3):

$(n - c)(15 - 1) = 42$

$(n - c)14 = 42 \Rightarrow n - c = 3$ ...(4)

De (2) y (4):

$\Rightarrow n = 9 \wedge c = 6$

Por lo tanto:

La base mayor es 9 (sistema nonario).

Clave C

12. Datos:

a y e son pares ...(1)

$\overline{ab} + \overline{ed} = 152$ ...(2)

$\overline{cd} + \overline{bc} = 101$ ...(3)

De (1) y (2):

$b + d = 12 \wedge a + e = 14$ ...(4)

De (3):

$d + c = 11 \wedge c + b = 9$ ...(5)

$S = \overline{abcde} + \overline{edbca}$

Ordenando los sumandos y utilizando (4) y (5):

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,1 \\ a\,b\,c\,d\,e\,+ \\ e\,d\,b\,c\,a \\ \hline 1\,5\,3\,0\,2\,4 \end{array}$$

$\therefore \Sigma$cifras de S = 15

Clave A

13. Del enunciado:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} r_e & q+1 \end{array}$$

$\div\ r;\ r_e;\ q;\ d$

+3 +3 +3

$\Rightarrow r + 3 = r_e$

$\Rightarrow r + 9 = d$

Sabemos:

$r + r_e = d$

$r + (r + 3) = r + 9$

$\Rightarrow r = 6$

Luego: $\Rightarrow r_e = 6 + 3 = 9$

$q = 6 + 6 = 12$

$d = 6 + 9 = 15$

Entonces:

$D = dq + r$

$D = 15(12) + 6$

$\therefore D = 186$

Clave D

14. Calculamos la cantidad de números que terminan en cifra 5:

n.° de 1 cifras $\Rightarrow$ 5 : 1 número

n.° de 2 cifras $\Rightarrow \overline{a5}$: 9 números

n.° de 3 cifras $\Rightarrow \overline{ab5}$: 90 números

n.° de 4 cifras $\Rightarrow \overline{abc5}$: 352 números

$\Rightarrow 2260 - 452 = 1808$

Por lo tanto $1808 \times 2 = 3616$ páginas

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 23) Unidad 1

Comunicación matemática

1. De la adición:

$$\begin{array}{r} \overline{53a}\ + \\ \overline{4b2} \\ \overline{c43} \\ \hline \overline{d287} \end{array}$$

Observamos:

$a + 2 + 3 = 7 \quad \Rightarrow a = 2$

$3 + b + 4 = 8 \quad \Rightarrow b = 1$

$5 + 4 + c = \overline{d2} \quad \Rightarrow c = 3 \wedge d = 1$

Luego:

I. $a + c = 2 + 3 = 5$

II. $(c - b)^{a+d} = (3 - 1)^{2+1} = 8$

III. $a_{(5)} + b_{(5)} + c_{(5)} = 2_{(5)} + 1_{(5)} + 3_{(5)} = 11_{(5)}$

2. Observamos:

- $$\begin{array}{r} 31_{(5)}\ + \\ 41_{(5)} \\ \hline 122_{(5)} \end{array}$$

Veamos:

$1_{(5)} + 1_{(5)} = 2_{(5)}$

$3_{(5)} + 4_{(5)} = 7 = 1 \times 5 + 2$

↓ lleva ↓ queda

- $$\begin{array}{r} 24_{(5)}\ \times \\ 3_{(5)} \\ \hline 132_{(5)} \end{array}$$

Veamos:

$3 \times 4 = 12 = 2 \times 5 + 2$

↓ lleva ↓ queda

$3 \times 2 + 2 = 8 = 1 \times 5 + 3$

↓ lleva ↓ queda

- $C.A.(213_{(5)}) = \overline{(4-2)(4-1)(5-3)}_{(5)}$

$= 232_{(5)}$

3. Como: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mnp}$

Por propiedad:

$n = 9;\ m + p = 9 \wedge a - c = m + 1$

Luego:

I. $n = 9$

II. $m + p = 9$

III. $a - c = 6$

Razonamiento y demostración

4. $$\begin{array}{l|l} 23 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{20} & 4 \\ 3 & \end{array} \Rightarrow d = 5;\ q = 4;\ r_d = 3$$

Como:

$r_e + r_d = d \Rightarrow r_e = 2$

$q_e = q + 1 \Rightarrow q_e = 5$

Además:

$r_{mín.} = 1$

$r_{máx.} = d - 1 \Rightarrow r_{máx.} = 4$

5. I. F

C.A.(97) = C. A.(7), pero $97 \neq 7$

II. V

$\underbrace{M + S}_{M} + D = 658 \Rightarrow 2M = 658$

$M = 329$

III. F

$m + n = 6$, si $n = 2 \Rightarrow m = 4$

Resolución de problemas

6. $\overline{a1x} + \overline{a2x} + \overline{a3x} + \ldots + \overline{a7x} = \overline{38y1}$

Por descomposición polinómica:

$\underbrace{(100a + 10 + x) + (100a + 20 + x) + \ldots + (100a + 70 + x)}_{7\ \text{sumandos}}$

$7(100a) + 10 + 20 + 30 + \ldots + 70 + 7(x) = \overline{38y1}$

$700a + 10\underbrace{(1 + 2 + 3 + \ldots + 7)}_{\frac{7\,.\,8}{2}} + 7x = \overline{38y1}$

$\underbrace{700a}_{\text{termina en cero}} + \underbrace{280}_{\text{termina en cero}} + \underbrace{7x}_{\text{termina en 1}} = \overline{38y1} \quad \Rightarrow x = 3$

$700a + 280 + 21 = \overline{38y1}$

$700a + 301 = \overline{38y1}$

$700a = \overline{35y0}$

↓ 5 ↓ 0

$\Rightarrow a = 5;\quad x = 3;\quad y = 0$

Piden: $5 + 3 + 0 = 8$

Clave C

7. Deuda externa del Perú:

$\overline{abc} \times 100^3 = \overline{abc} \times 10^6$

Pagó: $\overline{cba} \times 100^3 = \overline{cba} \times 10^6$

Lo que debe: $\overline{abc} \times 10^6 - \overline{cba} \times 10^6$

Además:

$5 \times 10\,000^2 < (\overline{abc} - \overline{cba}) \times 10^6 < 6 \times 10\,000^2$

$5\,.\,10^2\,.\,10^6 < (\overline{abc} - \overline{cba})\,.\,10^6 < 6\,.\,10^2\,.\,10^6$

$500 < \overline{abc} - \overline{cba} < 600$

$500 < \overline{xyz} < 600$

↓ 5

Por propiedad: $y = 9$

$x + z = 9 \Rightarrow 5 + z = 9 \Rightarrow z = 4$

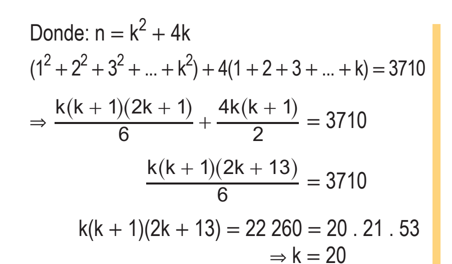
La deuda externa actual: $\underbrace{(\overline{abc} - \overline{cba})}_{\overline{xyz}} \times 10^6$

$= 594 \times 10^6 = 594 \times 100^3$

Clave A

8. $5 + 12 + 21 + \ldots + n = 3710$

$(1^2 + 4.1) + (2^2 + 4\,.\,2) + (3^2 + 4\,.\,3) + \ldots + (k^2 + 4\,.\,k) = 3710$



Donde: $n = k^2 + 4k$

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2) + 4(1 + 2 + 3 + ... + k) = 3710$

$\Rightarrow \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \dfrac{4k(k+1)}{2} = 3710$

$\dfrac{k(k+1)(2k+13)}{6} = 3710$

$k(k+1)(2k+13) = 22\,260 = 20 \,.\, 21 \,.\, 53$

$\Rightarrow k = 20$

$\therefore n = 20^2 + 4(20) = 480$

Clave B

9. Sabemos:

$D \;\underline{|\, d}$ $\quad \Rightarrow D = dq + r \quad ...(I)$
$r \quad q$

Por dato:
$D + d = 31r$
$D - d = 21r$
$\Rightarrow D = 26r \wedge d = 5r$

Reemplazando en (I):

$26r = (5r)(q) + r$

$25r = 5rq \Rightarrow 25 = 5q$

$\therefore q = 5$

Clave C

10. 8; 21; 34; 47; ...

13 13 13

$t_n = (n-1)13 + 8$
$t_n = 13n - 5$

$300 < t_n < 500$

$300 < 13n - 5 < 500$

$305 < 13n < 505$

$23{,}46 < n < 38{,}84$

$\Rightarrow n = 24; ...; 38$

$\therefore$ Hay 15 términos.

Clave B

Nivel 2 (página 23) Unidad 1

Comunicación matemática

11. Completando los recuadros:

```
 1 [7] 1 | 1 [2]
 1 [2]   | [1] 4
 -----
   [5] 1
    4  8
   -----
       3
```

I. Suma de valores de los recuadros vacíos
$= 7 + 2 + 5 + 2 + 1 = 17$

II. $r_{máx.} = d - 1 \Rightarrow r_{máx.} = 11$

III. $r + r_e = d \Rightarrow r + r_e = 12$

12. I. $r = 16_{(n)} - 12_{(n)} = (n+6) - (n+2) \Rightarrow r = 4$

II. Observamos:

$30_{(n)} = 16_{(n)} + 4 + 4$

$3n = n + 6 + 8$

$2n = 14 \Rightarrow n = 7$

III. $\overline{2a}_{(7)} = 16_{(7)} + 4$

$14 + a = 7 + 6 + 4 \Rightarrow a = 3$

$\text{n.° términos} = \dfrac{63_{(7)} - 12_{(7)}}{4} + 1$

$\text{n.° términos} = \dfrac{45 - 9}{4} + 1 = 10$

$\Rightarrow a + \text{n.° términos} = 13$

Razonamiento y demostración

13. $\overline{abc} -$
$\overline{cba}$
$\overline{mnp}$

Observamos:

Orden cero:
Como $a > c \Rightarrow p = c + 10 - a$ ... (1)
Orden uno:
$n = (b-1) + 10 - b \Rightarrow n = 9$ ... (2)

Orden dos:
$m = (a-1) - c$ ... (3)
I. $n = 9$ (de (2))
II. $m + p = 9$ (sumando (1) y (3))
III. $a - c = m + 1$ (de (3))

14. División por defecto:

$D \;\underline{|\, d}$
$r_d \quad q$

$D = d \,.\, q + r_d$ ... (1)

División por exceso:

$D \;\underline{|\, d}$
$r_e \quad q_e = q + 1$

$D = d \,.\, q_e - r_e$ ... (2)

Igualando (1) y (2):

$d \,.\, q + r_d = d \,.\, (q+1) - r_e$

$d \,.\, q + r_d = d \,.\, q + d - r_e$

$\Rightarrow r_e + r_d = d$

Resolución de problemas

15. Sea un numeral de 3 cifras: $\overline{abc}$

$\overline{abc} + \overline{3xy} = \overline{cba}$

$\Rightarrow \overline{cba} - \overline{abc} = \overline{3xy}$

Por propiedad: $c - a = 3 + 1$
$c - a = 4$

Por dato: $a + b + c = 13 \wedge c = 3a$

$\Rightarrow c - a = 4$
$\downarrow$
$3a - a = 4 \Rightarrow a = 2 \wedge c = 6$

$\Rightarrow a + b + c = 13$
$2 + b + 6 = 13 \Rightarrow b = 5$

El numeral es: $\overline{abc} = 256$

$\therefore$ Cifra de las decenas: 5

Clave C

16. $x^2 + 6x - 55 = 0$

$x \quad -5$
$x \quad +11$

$\Rightarrow x = 5$

Luego:
• $t_1 + t_2 = 5$ ...(1)
• $t_5 = 13$ ...(2)

De (1):
$t_1 + (t_1 + r) = 5$
$\Rightarrow 2t_1 + r = 5$ ...(3)

De (2):
$t_5 = t_1 + 4r = 13$ ...(4)

De (3) y (4):
$\Rightarrow t_1 = 1 \wedge r = 3$
$\therefore r = 3$

Clave C

17. $\overline{a1a}_{(8)} + \overline{a2a}_{(8)} + ... + \overline{a7a}_{(8)} = \overline{bcd5}_{(8)}$

^{32}
$\overline{a1a}_{(8)} +$
$\overline{a2a}_{(8)}$
$\vdots$
$\overline{a7a}_{(8)}$
$\overline{bcd5}_{(8)}$

En el orden cero:
$7 \times a_{(8)} = n5_{(8)}$
$\downarrow \qquad \downarrow$
$3 \qquad 2$

En el orden uno:

$2 + (1 + 2 + ... + 7) = 2 + \dfrac{7 \,.\, 8}{2} = 30$

$\Rightarrow 30 = 36_{(8)} \Rightarrow d = 6$

En el orden dos:

$3 + 7(a) = 3 + 7(3) = 24 = 30_{(8)}$

Entonces: $a = 3$; $b = 3$; $c = 0$; $d = 6$

Piden: $a + b + c + d = 3 + 3 + 0 + 6 = 12$

Clave D

18. $\overline{DOS} \times \overline{DOS} = \overline{CUATRO}$; $(S = 2)$

```
   D O 2 ×      ⇒ . 2 × 2 = 4 = O
   D O 2            D × 2 = ...0
 1 0 8 4              D = 5
 2 1 6 8
2 7 1 0          ⟶ (dato)
C U A T R O
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
2 9 3 7 6 4
```

Piden: $A + C + U = 3 + 2 + 9 = 14$

Clave B

19. $(\overline{abc} - \overline{cba})(a - c) = \overline{xyz1}$

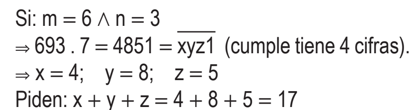
$(\overline{mpn})(a - c) = \overline{xyz1}$

Por propiedad:
$p = 9$
$m + n = 9$
$a - c = m + 1$

$\Rightarrow (\overline{m\,9\,n})(m+1) = \overline{xyz1}$

$9 = 2 + 7 \quad 3$ termina en
$9 = 6 + 3 \quad 7$ cifra uno

Si: $m = 2 \wedge n = 7$
$\Rightarrow 297 \,.\, 3 = 891$ (no cumple tiene 3 cifras).



Si: $m = 6 \wedge n = 3$

$\Rightarrow 693 \,.\, 7 = 4851 = \overline{xyz1}$ (cumple tiene 4 cifras).

$\Rightarrow x = 4; \quad y = 8; \quad z = 5$

Piden: $x + y + z = 4 + 8 + 5 = 17$

Clave B

20. Sea N el número: $N = \overline{ab0}$

$\overline{ab0}\ \underline{|d}$ Por dato: $q = r_{máx.}$

$r_{máx.}\quad q$

$\Rightarrow \overline{ab0} = dq + r_{máx.}$

$\overline{ab0} = d(d - 1) + (d - 1)$

$\overline{ab0} = (d - 1)(d + 1)$

$\overline{ab0} = d^2 - 1$

$\overline{ab1} = d^2$

$\hookrightarrow \underbrace{11; 19; 21; 29; 31}_{5 \text{ valores}}$

$\therefore$ Existen 5 números.

Clave A

Nivel 3 (página 24) Unidad 1

Comunicación matemática

21. Sabemos: $D = d \,.\, q + r$

$\overline{1(b + 4)(b - 2)} = \overline{ab} \,.\, 12 + 13$

$100 + 10(b + 4) + b - 2 = 12(10a + b) + 13$

$138 + 11b = 120a + 12b + 13$

$125 = 120a + b$

$\quad\downarrow\quad\downarrow$

$\quad 1 \quad 5$

Luego: $D = 193 \wedge d = 15$

Como:

- $r_e + r_d = d \Rightarrow r_e = 2$
  $\downarrow \quad \downarrow$
  $13 \quad 15$
- $q_e = q + 1 = 12 + 1 \Rightarrow q_e = 13$
- $r_{mín.} = 1 \wedge r_{máx.} = d - 1 = 15 - 1 = 14$

22. Del gráfico, se tiene:

$$\frac{(23_{(5)} + 43_{(5)}) \times 6}{2} = \overline{mnp}_{(5)}$$

$121_{(5)} \times 3 = \overline{mnp}_{(5)}$

$413_{(5)} = \overline{mnp}_{(5)}$

$\Rightarrow m = 4; n = 1 \wedge p = 3$

I. $\overline{mn}_{(5)} + \overline{np}_{(5)} = 41_{(5)} + 13_{(5)} = 104_{(5)}$

II. $\overline{mnp}_{(5)} - \overline{pnm}_{(5)} = 413_{(5)} - 314_{(5)} = 44_{(5)}$

III. $2 + 4 + ... + \overline{pm} = 2 + 4 + ... + 34$

$= 2(1 + 2 + 3 + ... + 17)$

$= 2 \times \dfrac{(17)(18)}{2} = 306$

Razonamiento y demostración

23. $x^2 - 24x + 135 = 0$

$x \quad -9 \quad -9x\ +$

$x \quad -15 \quad -15x$

$\qquad\qquad -24x$

$(x - 9)(x - 15) = 0$

$\Rightarrow x = 9 \wedge x = 15$

Luego: $a = 9, b = 1 \wedge c = 5$

I. V

$a + b + c = 9 + 1 + 5 = 15$

II. F

La progresión aritmética es:

9; 15; ...; 195 (r = 6)

n.° términos $= \dfrac{195 - 9}{6} + 1 = 32$

III. F

$t_n = 9 + 6(n - 1) = 6n + 3$

24. Analizamos:

I. V

$\overline{xy}.10000 + \overline{xy}.100 + \overline{xy} = 13x \,.\, y.(\overline{xy}^2)$

$10101 \,.\, \overline{xy} = 13x \,.\, y.(\overline{xy}^2)$

$777 \,.\, \overline{xy} = x.y \,.\, (\overline{xy})^2$

$3 \,.\, 7 \,.\, 37 = x \,.\, y.(\overline{xy})$

$\Rightarrow x = 3 \wedge y = 7$

$(y - x)^2 = (7 - 3)^2 = 16$

II. F

Sea $\overline{abc} = 321$

$\Rightarrow N = \overline{abc} - \overline{cba} = 198$ tiene 3 cifras

III. V

Por propiedad: $n = 9 \wedge m + p = 9$

Luego:

$$E = \frac{m^2 + 2mn + n^2 - (n^2 + 2np + p^2)}{3(m - p)}$$

$$E = \frac{m^2 - p^2 + 2n(m - p)}{3(m - p)} = \frac{m + p + 2n}{3} = \frac{9 + 2(9)}{3}$$

$\Rightarrow E = 9$

25. $1000 - \overline{abc} + 10\,000 - 4 \times \overline{abc} = 9220$

$5\overline{abc} = 1780$

$\overline{abc} = 356$

$\Rightarrow a + b + c = 3 + 5 + 6 = 14$

Clave E

26. $\underbrace{66^{67}; 69^{70}; 72^{73}; 75^{76}; ...}_{113 \text{ términos}}$

P.A.: 66; 69; 72; 75

$t_n = 3n + 63 \Rightarrow t_{113} = 3(113) + 63 = 402$

$\underbrace{66^{67}; 69^{70}; 72^{73}; 75^{76}; ... ;96^{97};}_{11 \text{ términos}}$

$\underbrace{99^{100}; 102^{103}; ...; 402^{403}}_{102 \text{ términos}}$

n.° cifras $= 4 \,.\, 11 + 2 + 3 + 6 \,.\, 101$

n.° cifras $= 655$

Clave E

27. Del enunciado

$D\ \underline{|d}$ $\qquad D\ \underline{|d}$

$r \quad q \qquad r_e \quad q + 1$

$+ r\ ;\ r_e\ ;\ r_{máx.}\ ;\ q$

$\quad 5 \quad 5 \quad 5$

Sabemos:

$r + r_e = d \Rightarrow r + r + 5 = d$

$2r + 5 = d \quad ...(1)$

$r_{máx} = d - 1 \Rightarrow r + 10 = d - 1$

$r + 11 = d \quad ...(2)$

De (1) y (2) : $r = 6 \wedge d = 17$

Además : $r + 15 = q$

$6 + 15 = q \Rightarrow q = 21$

Luego:

$D = d \times q + r$

$D = (17) \times (21) + 6 = 363$

Clave A

28. $\overline{abc} \,.\, 3 = 12\square\square$

$\overline{abc} \,.\, 5 = \square\square\square 0$

$\overline{abc} \,.\, 8 = \square\square 5 \square$

$$\begin{array}{r} abc\ \times \\ 3 \\ \hline 1296 \end{array} \qquad \begin{array}{r} abc\ \times \\ 5 \\ \hline 2160 \end{array} \qquad \begin{array}{r} abc\ \times \\ 8 \\ \hline 3456 \end{array}$$

Dando valores tenemos:

$a = 4; b = 3; c = 2$

$\therefore a + b + c = 9$

Clave A

29. Sea el número: N

Por dato: $a + b + c + d + e + f = 27$

$$\begin{array}{lr} & 22222 \\ N \,.\, 2 = & \overline{abcdef}\ + \\ N \,.\, 5 = & \overline{cdefab} \\ N \,.\, 6 = & \overline{efabcd} \\ N \,.\, 7 = & \overline{bcdefa} \\ N \,.\, 8 = & \overline{fabcde} \\ N \,.\, 11 = & \overline{defabc} \\ \hline N \,.\, 39 = & 2999997 \end{array}$$

$$N = \frac{2\,999\,997}{39} = 76\,923$$

$\therefore$ El número es 76 923.

Clave E

30. Del enunciado:

$D\ \underline{|14}$ $\quad \Rightarrow D = 14q + 3$

$3 \quad q$

$D + n\ \underline{|14}$ $\quad \Rightarrow D + n = 14(q + 4) + r$

$r \quad q + 4$

$\downarrow$

$(14q + 3) + n = 14q + 56 + r$

$n = 53 + r$

Sabemos:

$d > r$

$14 > n - 53$

$67 > n \Rightarrow n_{máx.} = 66$

$\Rightarrow n_{mín.} = 53 + \underbrace{r_{mín.}}_{1} = 54$

$\therefore n_{máx.} + n_{mín.} = 66 + 54 = 120$

Clave B

MARATÓN MATEMÁTICA (página 26)

1. p es la única raíz de la ecuación cúbica, entonces:

	1	0	–108	$p(108 - p^2)$
p		p	p^2	$-p(108 - p^2)$
	1	p	$p^2 - 108$	0

Entonces:
$(x - p)(x^2 + px + p^2 - 108) = 0$
Como p es la única raíz real, entonces la ecuación cuadrática:
$x^2 + px + p^2 - 108 = 0$
no tiene raíces reales, entonces:
$p^2 - 4(p^2 - 108) < 0$
$p^2 < 4p^2 - 432$
$432 < 3p^2$
$12 < |p|$
$\Rightarrow\ p < -12 \ \vee\ 12 < p$
Luego; el menor valor entero positivo de p es 13, entonces:
$\overline{ab}_{(a+1)} = 13$
$a(a + 1) + b = 13$
a = 3, a + 1 = 4, b = 1
Por lo tanto:
$35_{(11)} + 111 = 38 + 111 = 149$

Clave C

2. $[(p \vee \sim q)\ \wedge\ (\sim p \vee q)] \vee q \vee \sim p$
$\equiv [(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \vee (\sim p \vee q)$
$\equiv \sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q$

Clave B

3. $\sim r\ \wedge\ (\sim p \Rightarrow q) \equiv V \Rightarrow r \equiv F$
(V, V)
$(s \vee p) \Longleftrightarrow r \equiv F \Rightarrow s \vee p = F\ ;\ q = V$
(r = F; s = F, p = F)
Luego:
I. $\sim(p \wedge \sim s) \equiv \sim(F \wedge V) \equiv \sim F \equiv V$
II. $r \Rightarrow \sim s \equiv F \Rightarrow V \equiv V$
III. $\sim q\ \ \Delta\, r \equiv F\ \Delta\ F \equiv F$

Clave C

4. $A = \{2; 4; 6; 8; 10; ...; 40\} \Rightarrow n(A) = 20$
$B = \{20; 24; 28; 32; 36; 40; ...; 60\} \Rightarrow n(B) = 11$
$n(A \cap B) = 6$
$\therefore\ n(A\ \Delta\ B) = 20 + 11 - 6 - 6 = 19$

Clave B

5. $M = \left\{\dfrac{x^2}{x^2 + 3} \,/\, x \in \mathbb{N}; 2 \le x \le 20\right\}$

Clave A

6. $n + 1 + 2 + ... + (n - 1) = a(111)$
$\dfrac{n(n+1)}{2} = 3 \times 37 \times a$
$n(n + 1) = 6 \times 37 \times a$
n = 36, n + 1 = 37, a = 6
$\therefore\ n + a^2 = 36 + 36 = 72$

7. Se tiene que:
$p < b < a < m < n < 7$
b = 2 ó 3
También: $0 < p$; $0 < c$; $p \neq c$
Si b = 2: $\overline{cpp}_{(2)} = 111_{(2)}$, pero $p \neq c$, entonces
b = 3, luego:
$b < a < m < n < 7$
b = 3, a = 4, m = 5, n = 6
Del enunciado:

	Jóvenes	Adultos	
Hombres	$\overline{abp}_{(m)}$	$\overline{pb}_{(a)}$	Total: $\overline{ban}_{(7)}$
Mujeres	$\overline{ccm}_{(n)}$		
		$\overline{cpp}_{(b)}$	

Como $p \neq c$, si $c > p$, entonces: p = 1; c = 2
Se tiene:
$431_{(5)} + 225_{(6)} + 211_{(3)} = 230 = 446_{(7)} \neq 346_{(7)}$
Luego: p = 2; c = 1
Piden:
$\overline{ccm}_{(n)} + \overline{cpp}_{(b)} - \overline{pb}_{(a)} = 115_{(6)} + 122_{(3)} - 23_{(4)} = 53$

Clave C

8.

f(1)	f(2)	f(3)	f(4)	f(5)
4	10	18	28	40

4 + 10 + 18 + 28 + 40
Diferencias: +6, +8, +10, +12
Segundas diferencias: +2, +2, +2

$S_n = 4C_1^n + 6C_2^n + 2C_3^n$
$S_n = 4n + 3n(n - 1) + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$
$\Rightarrow\ S_{20} = 4(20) + 3(20)(19) + \dfrac{20(19)(18)}{3}$
$S_{20} = 3500$

Clave E

9. $S = 5 + 55 + 555 + ... + \underbrace{55...55}_{n\text{ cifras}}$
$S = 10 - 5 + 10^2 - 45 + 10^3 - 445 + ... + 10^n - \underbrace{44 ... 445}_{n\text{ cifras}}$
$S = 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n - (5 + 45 + 445 + ... + \underbrace{44 ... 445}_{n\text{ cifras}})$
$S = \dfrac{10(10^n - 1)}{9} - (4 + 44 + 444 + ... + \underbrace{44 ... 444}_{n\text{ cifras}} + \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{n\text{ sumandos}})$
$S = \dfrac{10(10^n - 1)}{9} - [4(1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111 ... 11}_{n\text{ cifras}}) + n]$
$S = \dfrac{10(10^n - 1)}{9} - \dfrac{4}{5}S - n$
Entonces:
$\dfrac{9S}{5} = \dfrac{10(10^n - 1) - 9n}{9}$
$\therefore\ S = \dfrac{5}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n)$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 31) Unidad 2

Comunicación matemática

1. $N = \overline{MCM(12; 6; 14)} = \overset{\circ}{84}$

I. $N = \overline{1mn} = \overset{\circ}{84} \times 2 = 168$

$\Rightarrow m + n = 6 + 8 = 14$

II. $N = \overline{ab} = \overset{\circ}{84}$

$\Rightarrow \overline{ab} + 23 = 84 + 23 = 107$

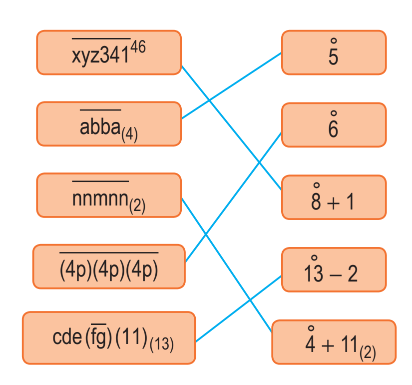
III. $5N = 5 \times \overset{\circ}{84} = \overset{\circ}{420} = 420 \times 2 = 840$

$\Rightarrow x^y = 4^0 = 1$

IV. $N = \underset{-+-+}{\overline{aabb}} = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow N = 9\overset{\circ}{2}4$

2.



- $\overline{xyz341}^{46} = (\text{impar})^{\text{par}} = \overset{\circ}{8} + 1$
- $\overline{abba}_{(4)} = \overset{\circ}{5} + a - b + b - a = \overset{\circ}{5}$
- $\overline{nnmnn}_{(2)} = \overline{11m11}_{(2)} = \overset{\circ}{4} + 11_{(2)}$
- $\overline{(4p)(4p)(4p)} = \overset{\circ}{6} \left< \begin{matrix} \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{2} \end{matrix} \right.$
- $\overline{cde(fg)(11)}_{(13)} = \overset{\circ}{13} + 11 = \overset{\circ}{13} - 2$

3. $\overline{bc} \times \overline{d(2d)} = \overline{1a0}$

$c = 5$; $\overline{d(2d)}$: par $\wedge\ \overset{\circ}{3}$

Como $\overline{d(2d)} = \overset{\circ}{3}$

Entonces: $\overline{1a0} = \overset{\circ}{3}$

$\Rightarrow a \left< \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{matrix} \right.$

Si: $a = 2$ & $\overline{b5} \times \overline{d(2d)} = 120$ (no se cumple)

Si: $a = 5$ & $\overline{b5} \times \overline{d(2d)} = 150$ (no se cumple)

Si: $a = 8$ & $\overline{b5} \times \overline{d(2d)} = 180 = 15 \times 12$

$\Rightarrow d = b = 1$

Piden:

$a + b + c + d = 9 + 1 + 5 + 1 = 16$

Clave E

Razonamiento y demostración

4. I. F

$5 + 10 + 5 = 20 \neq \overset{\circ}{3}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\overset{\circ}{5} \quad \overset{\circ}{5} \quad \overset{\circ}{5}$

II. V

III. V

IV. V

$319^{357} = (\overset{\circ}{5} - 1)^{357} = (\overset{\circ}{5} + (-1))^{357}$

$319^{357} = \overset{\circ}{5} + (-1)^{357} = \overset{\circ}{5} - 1$

5. I. V

$3x + 7y = 29$

$\overset{\circ}{3} + (\overset{\circ}{3} + y) = \overset{\circ}{3} + 2 \Rightarrow y = 2$

Luego: $3x + 7(2) = 29$

$3x + 14 = 29 \Rightarrow x = 5$

$\therefore\ x - y = 3$

II. F

$13(2x + 3) = \overset{\circ}{7} \ \wedge\ \overline{x5} < 97$

$2x + 3 = \overset{\circ}{7} \qquad x \leq 9$

$2x + 10 = \overset{\circ}{7}$

$x + 5 = \overset{\circ}{7}$

$\hookrightarrow 2; 9$

$\Rightarrow A = \{2; 9\}$

$\therefore\ n(A) = 2$

III. V

$2A^2 + 3AB + B^2$

$A^2 + AB + A^2 + 2AB + B^2$

$\underbrace{A(A + B)}_{\overset{\circ}{7}} + \underbrace{(A + B)^2}_{\overset{\circ}{7}}$

$\therefore\ 2A^2 + 3AB + B^2 = \overset{\circ}{7}$

IV. V

$(\overset{\circ}{4} + 3)^n = \overset{\circ}{4} + r$

$\overset{\circ}{4} + 3^n = \overset{\circ}{4} + r$

Analizando las potencias de 3:

$\left. \begin{matrix} 3^1 = \overset{\circ}{4} + 3 \\ 3^2 = \overset{\circ}{4} + 1 \end{matrix} \right\} g = 2$

$3^{\text{par}} = \overset{\circ}{4} + 1$

$3^{\text{impar}} = \overset{\circ}{4} + 3$

Luego:

Si n es par $\Rightarrow r = 1$

$n + r =$ impar

si n es impar $\Rightarrow r = 3$

$n + r =$ par

Clave B

Resolución de problemas

6. A) $\underbrace{19}_{} = \overset{\circ}{3} - 2$

$\hookrightarrow 21 - 2$

Reemplazando:

$\underbrace{21}_{} - 2 = \overset{\circ}{3} - 2$

$\hookrightarrow \overset{\circ}{3}$

$\Rightarrow \overset{\circ}{3} - 2 = \overset{\circ}{3} - 2$ (V)

B) $\underbrace{23}_{} = \overset{\circ}{4} + 3$

$\hookrightarrow 20 + 3$

Reemplazando:

$\underbrace{20}_{} + 3 = \overset{\circ}{4} + 3$

$\hookrightarrow \overset{\circ}{4}$

$\Rightarrow \overset{\circ}{4} + 3 = \overset{\circ}{4} + 3$ (V)

C) $\underbrace{29}_{} = \overset{\circ}{5} + 4$

$\hookrightarrow 25 + 4$

Reemplazando:

$\underbrace{25}_{} + 4 = \overset{\circ}{5} + 4$

$\downarrow$

$\Rightarrow \overset{\circ}{5} + 4 = \overset{\circ}{5} + 4$ (V)

D) $31 = \overset{\circ}{7} - 1$

$28 + 3$

Reemplazando:

$\underbrace{28}_{} + 3 = \overset{\circ}{7} - 1$

$\downarrow$

$\Rightarrow \overset{\circ}{7} + 3 = \overset{\circ}{7} - 1$

$3 = -1$ (F)

E) $\underbrace{41}_{} = \overset{\circ}{7} - 1$

$\downarrow$

$42 - 1$

Reemplazando:

$\underbrace{42}_{} - 1 = \overset{\circ}{7} - 1$

$\downarrow$

$\Rightarrow \overset{\circ}{7} - 1 = \overset{\circ}{7} - 1$ (V)

Clave D

7. $\overline{ab} = \overset{\circ}{9} \ \wedge\ \overline{ba} = \overset{\circ}{5}$

$\Rightarrow a = 5$

Luego:

$\overline{5b} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow 5 + b = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow b = 4$

$\Rightarrow \overline{ab} + \overline{ba} = 99$

$\therefore\ \Sigma$cifras de $(\overline{ab} + \overline{ba})$ es 18.

Clave A

8. $(\overset{\circ}{7} + 4)(\overset{\circ}{7} + 5)$

Por propiedad:

$\overset{\circ}{7} + 4 \times 5 = \overset{\circ}{7} + \underbrace{20}_{7\,.\,2 + 6}$

$= \overset{\circ}{7} + 7\,.\,2 + 6 = \overset{\circ}{7} + 6$

$\therefore\ (\overset{\circ}{7} + 4)(\overset{\circ}{7} + 5) = \overset{\circ}{7} + 6$

Clave E

9. $\overline{ab} = \overset{\circ}{7}$

31

$3a + b = \overset{\circ}{7}$

$\downarrow \quad \downarrow$

2 1

3 5

6 3

4 9

9 1

7 7

∴ Hay 6 números.

Clave C

10. $\overline{2ab0}$ es $\overset{\circ}{99}$

$\overline{2ab0} = \overset{\circ}{99} \begin{cases} \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{11} \end{cases}$

$\overline{2ab0} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a + b + 2 = \overset{\circ}{9}$

++++

$\overline{2ab0} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow \quad a - b - 2 = \overset{\circ}{11}$

−+−+

$\Rightarrow a + b = 16$

$a = 9;\ b = 7$

$\therefore\ a + b = 16$

Clave B

Nivel 2 (página 31) Unidad 2

Comunicación matemática

11. $3x = \overset{\circ}{n} + 1$

Si $n = 4$: $\quad 3x = \overset{\circ}{4} + 1 + 8$

$x = \overset{\circ}{4} + 3 \Rightarrow x = 3$

Si $n = 5$: $\quad 3x = \overset{\circ}{5} + 1 + 5$

$x = \overset{\circ}{5} + 2 \Rightarrow x = 2$

Si $n = 7$: $\quad 3x = \overset{\circ}{7} + 1 + 14$

$x = \overset{\circ}{7} + 5 \Rightarrow x = 5$

Si $n = 8$: $\quad 3x = \overset{\circ}{8} + 1 + 8$

$x = \overset{\circ}{8} + 3 \Rightarrow x = 3$

Si $n = 10$: $\quad 3x = \overset{\circ}{10} + 1 + 20$

$x = \overset{\circ}{10} + 7 \Rightarrow x = 7$

12.

- $G = \overline{cc} = \begin{cases} \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{11} \end{cases} \Rightarrow G = 99$
- $S = \overline{(2m)(3m)m} = \begin{cases} \overset{\circ}{66} \\ \overset{\circ}{7} \end{cases} \Rightarrow S = 462$
- $R = \overline{1pq} = \overset{\circ}{171} + 2 = 17^3$
- $I = \overline{ab} = \overset{\circ}{47} + 13 = 60$
- $T = \overline{mn}_{(4)} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow T = 11$
- $E = \overset{\circ}{5} + 4 + \overset{\circ}{5} + 9 = \overset{\circ}{5} + 3 \Rightarrow E = 633$

Razonamiento y demostración

13. Por descomposición polinómica:

$\overline{ab} \times \underbrace{100}_{(\overset{\circ}{99} + 1)} + \overline{cd} = \overset{\circ}{99}$

$\therefore\ \overline{ab} + \overline{cd} = \overset{\circ}{99}$

14. Por descomposición polinómica:

$a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d = \overset{\circ}{3}$

$a(\overset{\circ}{3} + 1)^3 + b(\overset{\circ}{3} + 1)^2 + c(\overset{\circ}{3} + 1) + d = \overset{\circ}{3}$

$a(\overset{\circ}{3} + 1) + b(\overset{\circ}{3} + 1) + c(\overset{\circ}{3} + 1) + d = \overset{\circ}{3}$

$\overset{\circ}{3} + a + b + c + d = \overset{\circ}{3}$

$\therefore\ a + b + c + d = \overset{\circ}{3}$

Resolución de problemas

15. $\overline{ababab} = \overset{\circ}{35}$

$\overline{ab}\ .\ 10\,000 + \overline{ab}\ .\ 100 + \overline{ab} = \overset{\circ}{35}$

$10101\ .\ \overline{ab} = \overset{\circ}{35}$

$3\ .\ 7\ .\ 13\ .\ 37\ .\ \overline{ab} = \overset{\circ}{35}$

$\downarrow$

$\overset{\circ}{5}$

$\overline{ab} = \overset{\circ}{5} \Rightarrow \overline{ab} = 95$ (máximo)

$\therefore\ a\ .\ b = 9\ .\ 5 = 45$

Clave C

16. $\overline{aba} = \overset{\circ}{33}$

$\Rightarrow \overline{aba} = 33k$

Los números que cumplen son:

132; 165; 198; 231; 264; 297; 330; 363; 396; 429; 462; 495; 528; 561; 594; 627; 660; 693; 726; 759; 792; 825; 858; 891; 924; 957; 990.

$\Rightarrow \overline{aba} = 363 \quad \vee \quad \overline{aba} = 858$

$(a = 3 \wedge b = 6) \quad \vee \quad (a = 8 \wedge b = 5)$

Piden: $3 + 6 + 8 + 5 = 22$

Clave D

17. $(\overset{\circ}{12} + 7) = (\overset{\circ}{12} + 5)\overline{abc} + (\overset{\circ}{12} + 3)$

$\overset{\circ}{12} = 5\overline{abc} - 4 = 5\overline{abc} - 4 + 24$

$\overset{\circ}{12} = 5\overline{abc} + 20 = 5(\overline{abc} + 4)$

$\overset{\circ}{12} = \overline{abc} + 4 \Rightarrow \overline{abc} = 12k - 4$

$100 < \overline{abc} = 12k - 4$

$104 < 12k$

$8{,}66... < k \Rightarrow k_{mín.} = 9$

$\Rightarrow \overline{abc} = 12(9) - 4$

$\therefore\ \overline{abc} = 104$

Clave C

18. $\underbrace{\overline{2a3b2a3b...2a3b}}_{712\ \text{cifras}} = \overset{\circ}{9} + 2 \quad ...(1)$

De (1) se observa que el numeral $\overline{2a3b}$ se repite $\frac{712}{4} = 178$ veces.

Luego:

$\overset{\circ}{9} + 178(2 + a + 3 + b) = \overset{\circ}{9} + 2$

$\overset{\circ}{9} + (\overset{\circ}{9} + 7)(2 + a + 3 + b) = \overset{\circ}{9} + 2$

$7(2 + a + 3 + b) - 2 = \overset{\circ}{9}$

$7(2 + a + 3 + b) + 7 = \overset{\circ}{9}$

$7[(2 + a + 3 + b) + 1] = \overset{\circ}{9}$

$((2 + a + 3 + b) + 1) = \overset{\circ}{9}$

$\overset{\circ}{9} + 2 + a + 3 + b + 1 = \overset{\circ}{9}$

$a + b + 6 = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow a + b = 3 \ \vee\ a + b = 12$

Clave A

19.

- $\overline{ab} = \overset{\circ}{5} \Rightarrow b = 0 \vee b = 5 \quad ...(1)$
- $\overline{ba} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow \ (b \neq 0) \quad ...(2)$

De (1):

$b = 5$

De (2):

$\overline{ba} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow b + a = \overset{\circ}{9}$

$5 + a = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 4$

- $\overline{abc} = \overset{\circ}{4}$

$\overline{45c} = \overset{\circ}{4} \Rightarrow \overline{5c} = \overset{\circ}{4}$

$50 + c = \overset{\circ}{4}$

$2 + c = \overset{\circ}{4}$

$\downarrow$

2

6

$\therefore\ (a + b + c)_{máx.} = 15$

Clave D

20. N: número de alumnos.

$N \begin{cases} \overset{\circ}{12} + 4 + 24 = \overset{\circ}{12} + 28 \\ \overset{\circ}{18} - 8 = \overset{\circ}{18} + 10 + 18 = \overset{\circ}{18} + 28 \end{cases}$

$\overset{\circ}{\overline{MCM(12;\ 18)}} + 28$

$N = \overset{\circ}{36} + 28 = 36k + 28$

$70 < 36k + 28 < 120$

$1{,}6 < k < 2{,}5...$

$\Rightarrow k = 2$

$\Rightarrow 36(2) + 28 = 100$

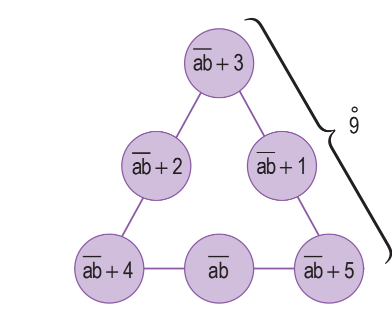
↳ Luis

Clave A

Nivel 3 (página 32) Unidad 2

Comunicación matemática

21.



$$\overline{ab} + 3 + \overline{ab} + 1 + \overline{ab} + 5 = \overset{\circ}{9}$$
$$3\overline{ab} + 9 = \overset{\circ}{9}$$
$$3\overline{ab} = \overset{\circ}{9}$$
$$\overline{ab} = \overset{\circ}{3}$$
$$\overline{ab}_{mín.} = 12$$

Luego:
$15 + 17 + 16 = 48$

Clave D

22. Sea x el número de una cifra, entonces:

$x^0 = \overset{\circ}{\overline{ab}} + 1 \qquad x > 1$
$x^1 = \overset{\circ}{\overline{ab}} + n \ \Rightarrow x = \ n$
$x^2 = \overset{\circ}{\overline{ab}} + 3$
$x^3 = \overset{\circ}{\overline{ab}} + 12$
$x^4 = \overset{\circ}{\overline{ab}} + 9$
$x^5 = \overset{\circ}{\overline{ab}} + 10$

Además, se observa que si r_1; r_2; ...; r_k son los restos potenciales de las potencias de un número con respecto al módulo m y r_1'; r_2'; ...; r_k' son los restos potenciales por exceso, de las potencias del mismo número con respecto al módulo m, entonces se cumple:
$r_1 + r_1' + r_2 + r_2' = ... = r_k + r_k' = m$

Luego, si observamos la figura, tenemos:
$1 + 12 = n + 9 = 3 + 10 = 12 + 1$
$= 9 + n = 10 + 3 = 13$
Entonces: $\overline{ab} = 13 \wedge x = \ n = 4$
Nos piden:
$x(an + b) = \ 4(1 \times 4 + 3) = \ 28$

Clave C

Razonamiento y demostración

23. Por descomposición polinómica:

$$a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10 + e = \overset{\circ}{7}$$
$$a(\overset{\circ}{7} + 3)^4 + b(\overset{\circ}{7} + 3)^3 + c(\overset{\circ}{7} + 3)^2 + d(\overset{\circ}{7} + 3) + e = \overset{\circ}{7}$$
$$a(\overset{\circ}{7} + 81) + b(\overset{\circ}{7} + 27) + c(\overset{\circ}{7} + 9) + 3d + e = \overset{\circ}{7}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$\overset{\circ}{7} - 3 \qquad \overset{\circ}{7} - 1 \qquad \overset{\circ}{7} + 2$$
$$7 - 3a - b + 2c + 3d + e = \overset{\circ}{7}$$
$$\therefore\ -3a - b + 2c + 3d + e = 7$$

24. Sea: n.° impar $= 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$
n.° par $= 2m$, $m \in \mathbb{N}$
Luego:
$(\text{n.° impar})^{\text{n.° par}} = \overset{\circ}{8} + r$
$= (2k + 1)^{2m} = [(2k + 1)^2]^m$
$= [4k^2 + 4k + 1]^m = [4\underbrace{k(k + 1)}_{par} + 1]^m$
$= [\overset{\circ}{8} + 1]^m = \overset{\circ}{8} + 1^m$
$\therefore \ (\text{n.° impar})^{\text{n.° par}} = \overset{\circ}{8} + 1$

Resolución de problemas

25. Piden el resto:
$E = \underbrace{232323...232}_{101\ cifras}$
$50 \times 2 + 50 \times 3 + 2 = 252 = \overset{\circ}{9}$
$\therefore$ Resto = 0

Clave B

26. $\overline{xyz} = \overset{\circ}{7} + 0 = \overset{\circ}{7} \qquad ...\ (I)$

$\left.\begin{array}{l}\overline{xyz} = \overset{\circ}{5} + 1 \\ \overline{xyz} = \overset{\circ}{6} + 1\end{array}\right\} \overline{xyz} = \overset{\circ}{30} + 1 \qquad ...\ (II)$

De (I) y (II) se tiene:

$\left.\begin{array}{l}\overline{xyz} = \overset{\circ}{7} + 91 \\ \overline{xyz} = \overset{\circ}{30} + 91\end{array}\right\} \overline{xyz} = \overset{\circ}{210} + 91$

$\Rightarrow \overline{xyz} = \left\{\begin{array}{l}301 \\ 511 \\ 721 \\ 931\end{array}\right.$

$\therefore \ (x + y + z)_{máx.} = 13$

Clave D

27. Del enunciado:
$8x + 13y = 617$
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
$\overset{\circ}{8} \quad (\overset{\circ}{8}+5) \quad \overset{\circ}{8}+1$

$5y - 1 = \overset{\circ}{8}$
$5y - 1 + 16 = \overset{\circ}{8}$
$5y + 15 = \overset{\circ}{8}$
$y + 3 = \overset{\circ}{8} \Rightarrow y_0 = 5 \wedge x_0 = 69$

Luego:
$\left.\begin{array}{l}x = 69 - 13t \\ y = 5 + 8t\end{array}\right\} t \in \mathbb{Z}$

t	x	y
-1	82	-3
0	69	5
1	56	13
2	43	21
3	30	29
4	17	37
5	4	45
6	-9	53

$\Rightarrow$ cantidad mínima (fila t = 5)

$\therefore$ El mínimo número de prendas que podría comprar es 49.

Clave B

28. El término general de la secuencia es:

$(59 + n)(1501 - n)$ tal que:

$1 \leq n \leq 1441$ ... (I)

Del enunciado:

$$(59 + n)(1501 - n) = \overset{\circ}{9} + 5$$
$$(\overset{\circ}{9} + 5 + n)(\overset{\circ}{9} + 7 - n) = \overset{\circ}{9} + 5$$
$$\overset{\circ}{9} + 35 - 5n + 7n - n^2 = \overset{\circ}{9} + 5$$
$$30 + 2n - n^2 = \overset{\circ}{9}$$
$$n^2 - 2n - 30 = \overset{\circ}{9}$$
$$n^2 - 2n - 3 = \overset{\circ}{9}$$

$n \quad -3$

$n \quad +1$

Luego:

$(n - 3)(n + 1) = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow n - 3 = \overset{\circ}{9} \quad \vee \quad n + 1 = \overset{\circ}{9}$

$n = 9k + 3 \qquad n = 9m - 1$ ... (II)

Reemplazando (II) en (I):

$1 \leq 9k + 3 \leq 1441$

$9k \leq 1438$

$k \leq 159{,}7... \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; ...; 159\}$

160 valores

Procediendo análogamente:

$\Rightarrow m \in \{1; 2; ...; 160\}$

160 valores

Entonces n toma 320 valores.

$\therefore$ Hay 320 términos que tienen la forma $\overset{\circ}{9} + 5$.

Clave B

29. Sea $\overline{xyz}$ el n.° de páginas del libro.

Del enunciado:

$510 < \overline{xyz} < 700 \Rightarrow 510 < 11k < 700$

$\hookrightarrow \overset{\circ}{11} \qquad 46{,}3... < k < 63{,}6...$

$47 \leq k \leq 63$ ... (I)

Además:

$$\overbrace{1; ...; 9;}^{}\ \ \overbrace{\underbrace{1; ...; 9}_{9 \times 1};\ \underbrace{10, \ ; 99}_{90 \times 2};\ \underbrace{100; ...; \overline{xyz}}_{(\overline{xyz} - 99) \times 3}}^{\overset{\circ}{10} \text{ tipos de imprenta}}$$

$$\Rightarrow 9 + 180 + 3(\overline{xyz} - 99) = \overset{\circ}{10}$$
$$3\overline{xyz} - 108 = \overset{\circ}{10}$$
$$3(\overline{xyz} - 36) = \overset{\circ}{10}$$
$$\underbrace{\overline{xyz}}_{11k} - 36 = \overset{\circ}{10}$$
$$10k + 6 = \overset{\circ}{10}$$
$$k = \overset{\circ}{10} + 6 \quad ... \text{(II)}$$

De (I) y (II), tenemos: $k = 56$

$\Rightarrow \overline{xyz} = 11 \times 56 = 616$

$\therefore x + y + z = 13$

Clave A

30. $\overline{ab} < 15 \Rightarrow a = 1 \wedge b \in \{2; 3; 4\}$ ... (I)

$$(\overbrace{\underbrace{288288...}_{18}\ \underbrace{28828}_{18}}^{30 \text{ cifras}})^{\overline{UNI}^{2014}} = \overset{\circ}{15} + \overline{ab};$$

$$(\overset{\circ}{3} + 10)^{\overline{UNI}^{2014}} = \overset{\circ}{3} + \overline{1b}$$
$$(\overset{\circ}{3} + 1)^{\overline{UNI}^{2014}} = \overset{\circ}{3} + \overline{1b}$$
$$\overset{\circ}{3} + 1^{\overline{UNI}^{2014}} = \overline{1b}$$
$$\overset{\circ}{3} + 1 = \overline{1b} \quad ... \text{(II)}$$

De (I) y (II), tenemos: $b = 3$

Como: $\overline{abcd} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow b + d - a - c = \overset{\circ}{11}$

$3 + d - 1 - c = \overset{\circ}{11}$

$d - c = \overset{\circ}{11} - 2$ ... (III)

Además: $\overline{cabd} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a + b + c + d = \overset{\circ}{9}$

$1 + 3 + c + d = \overset{\circ}{9}$

$4 + c + d = \overset{\circ}{9}$ ... (IV)

De (III) y (IV) tenemos: $c = 8 \wedge d = 6$

$$\overline{dab}^{\overline{UNI16}} = (\overset{\circ}{\overline{c - b}}) + r$$
$$613^{\overline{UNI16}} = \overset{\circ}{5} + r$$
$$(\overset{\circ}{5} + 3)^{\overline{UNI16}} = \overset{\circ}{5} + r$$
$$\overset{\circ}{5} + 3^{\overline{UNI16}} = \overset{\circ}{5} + r \quad ... \text{(V)}$$

Sabemos:

$$\left.\begin{array}{l} 3^1 = \overset{\circ}{5} + 3 \\ 3^2 = \overset{\circ}{5} + 4 \\ 3^3 = \overset{\circ}{5} + 2 \\ 3^4 = \overset{\circ}{5} + 1 \end{array}\right\} g = 4 \Rightarrow 3^{\overset{\circ}{4}} = \overset{\circ}{5} + 1$$
$$3^{\overline{UNI16}} = \overset{\circ}{5} + 1$$

Reemplazando en (V):

$\overset{\circ}{5} + (\overset{\circ}{5} + 1) = \overset{\circ}{5} + r \Rightarrow r = 1$

Clave C

31. $(\overset{\circ}{5} + 2)^4 = \overset{\circ}{5} + 1;\ (\overset{\circ}{5} + 3)^4 = \overset{\circ}{5} + 1;\ (\overset{\circ}{5} + 4)^4 = \overset{\circ}{5} + 1$

Luego:

$$P = (n^4)^{50m} + 2^2(n^4)^{100m} + 3^2(n^4)^{150m} + ... + 12^2(n^4)^{600}$$
$$P = \overset{\circ}{5} + 1 + 2^2 + 3^2 + ... + 12^2 = \overset{\circ}{5} + \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = \overset{\circ}{5} + 650 = \overset{\circ}{5}$$

Clave A

32. $N = 8 \times 10^{\overline{xy}} + 9^{\overline{yx}} = \overset{\circ}{8} + (\overset{\circ}{8} + 1)^{\overline{yx}}$

$N = \overset{\circ}{8} + 1$

$N = (\overset{\circ}{9} - 1)(\overset{\circ}{9} + 1)^{\overline{xy}} + \overset{\circ}{9} = \overset{\circ}{9} + 8$

$$N = \begin{cases} \overset{\circ}{8} + 16 + 1 = \overset{\circ}{8} + 17 \\ \overset{\circ}{9} + 8 + 9 = \overset{\circ}{9} + 9 + 17 \end{cases}$$

$\Rightarrow N = \overset{\circ}{72} + 17 = \overset{\circ}{72} + x + y$

Luego: $x + y = 17$ ...(1)

Del enunciado: $3x + y = \overset{\circ}{7}$

$2x + 17 = \overset{\circ}{7}$

$2x = \overset{\circ}{7} + 4$

$x = \overset{\circ}{7} + 2 \begin{cases} 2 \\ 9 \end{cases}$

Si $x = 2$: $2 + y = 17$

$y = 15$ ✗

Si $x = 9$: $9 + y = 17$

$y = 8$ ✓

$\therefore 8 - 9 = -1$

Clave E

33. $H = 3^{6n+2} + 5 \times 2^{6n+1}$

$H = 729^n \times 9 + 10 \times 64^n$

$H = (\overset{\circ}{19} + 7)^n \cdot 9 + 10(\overset{\circ}{19} + 7)^n$

$H = \overset{\circ}{19} + 19 \times 7^n = \overset{\circ}{9}$

Clave A

NÚMEROS PRIMOS - MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD) Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 24) Unidad 2

1. Sea:

$N = \overline{aaa} = a(111)$; donde: $CD(\overline{aaa}) = 8$

$\overline{aaa} = a \cdot 3 \cdot 37$

Luego:

Si: $a = 9 \Rightarrow N = 3^3 \cdot 37 \Rightarrow CD(N) = 8$

Si: $a = 2 \Rightarrow N = 2 \cdot 3 \cdot 37 \Rightarrow CD(N) = 8$

Si: $a = 5 \Rightarrow N = 5 \cdot 3 \cdot 37 \Rightarrow CD(N) = 8$

Si: $a = 7 \Rightarrow N = 7 \cdot 3 \cdot 37 \Rightarrow CD(N) = 8$

$\therefore$ Σvalores de $a = 9 + 2 + 5 + 7 = 23$

Clave D

2. $\overline{abab} = (101) \cdot \overline{ab}$

Para que $\overline{abab}$ tenga 6 divisores:

$\overline{abab} = p^{\alpha} \cdot q^{\beta}$; donde $\alpha = 1$ y $\beta = 2$

101 es primo absoluto.

Entonces $p = 101$, luego:

$\overline{abab} = 101 \times q^2$ donde $q^2 > 10$ y $q^2 < 100$

Además q es primo, luego: $q \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Solo 5 y 7 cumplen.

$\therefore$ Existen 2 números.

Clave D

3. $113\,400 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

$113\,400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot \underbrace{(3^4 \cdot 7)}$

Divisores impares y no múltiplos de 5.

$CD(\text{No } \overset{\circ}{5} \text{ e impares}) = (4 + 1) \cdot (1 + 1) = 10$

Clave E

4. Del enunciado:

- $N = 15CA(N)$ ...(1)
- $CD(N \times CA(N)) = 72$ ...(2)

Sea N de k cifras, entonces de (1):

$N = 15(10^k - N) \Rightarrow 16N = 15 \cdot 10^k$

Luego: $2^4N = 3 \cdot 5 \cdot 2^k \cdot 5^k$

$\Rightarrow N = 2^{k-4} \cdot 3 \cdot 5^{k+1}$

Además:

$CA(N) = 10^k - N = 2^k \cdot 5^k - (2^{k-4} \cdot 3 \cdot 5^{k+1})$

$CA(N) = 2^{k-4} \cdot 5^k \underbrace{(2^4 - 3 \cdot 5)}_{1}$ ...(3)

Entonces:

$N \times CA(N) = 2^{2k-8} \cdot 3 \cdot 5^{2k+1}$

De (2):

$(2k - 7)(2)(2k + 2) = 72$

$(2k - 7)(k + 1) = 18$

$\downarrow$

5

Reemplazando en (3):

$\Rightarrow CA(N) = 2 \cdot 5^5$

$\therefore CD(CA(N)) = (1 + 1) \cdot (5 + 1) = 12$

Clave E

5. Como 165 y 27 son pesí, además:

$\phi(27) = 3^2 \times (3 - 1) = 18$

Entonces:

$N = (165^{18})^2 + (165^{18})^4 + (165^{18})^6 + ... + (165^{18})^{22}$

Por el teorema de Euler: $165^{\phi(27)} = \overset{\circ}{27} + 1$

Luego: $N = \underbrace{(\overset{\circ}{27} + 1) + (\overset{\circ}{27} + 1) + ... + (\overset{\circ}{27} + 1)}_{11 \text{ sumandos}}$

$N = \overset{\circ}{27} + 11$

$\therefore$ El residuo de dividir N entre 27 es 11.

Clave E

6. Sean los lados del rectángulo b y a:

Entonces: $b \cdot a = 1250$

De donde: $b \cdot a = 2^1 \cdot 5^4 = N$

$CD(N) = (1 + 1)(4 + 1) = 10$

$\therefore$ n.° de rectángulos $= \frac{10}{2} = 5$

Clave B

7. $64! = 2^a \times 5^b \times p \Rightarrow DC$

Luego:

```
64 | 2
   32 | 2
      16 | 2
          8 | 2
            4 | 2
              2 | 2
                  1
```

```
65 | 5
   12 | 5
       2
```

$b = 12 + 2 = 14$

$a = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$

$64! = 2^{14} \times 5^{14} \times p$

$\therefore$ 64! termina en 14 ceros.

Clave D

8.

	3	5	4	q = 2
A	B	r	24	12
	r	24	12	0

$r = 24 \cdot 4 + 12 = 108$

$B = 5 \cdot r + 24 = 5 \cdot 108 + 24 = 564$

$A = 3 \cdot B + r = 3 \cdot 564 + 108 = 1800$

$\therefore A - B = 1236$

Clave E

9. Por dato:

$A = 7^{862} - 1 = (7^{431} - 1)(7^{431} + 1)$

$B = 7^{1293} - 1 = (7^{431} - 1)(7^{862} + 7^{431} + 1)$

Entonces:

$d = MCD(A; B) = 7^{431} - 1$

Sea: $m = MCM(A; B)$

Por propiedad:

$A \cdot B = MCM(A; B) \cdot MCD(A; B) = m \cdot d$

$\Rightarrow m = \frac{A \cdot B}{d} = \frac{(7^{862} - 1)(7^{1293} - 1)}{7^{431} - 1}$

$\Rightarrow m = (7^{431} + 1)(7^{1293} - 1)$

Luego: $7 = \overset{\circ}{10} + 7$

$7^2 = \overset{\circ}{10} + 9$

$7^3 = \overset{\circ}{10} + 3$

$7^4 = \overset{\circ}{10} + 1$

$7^{\overset{\circ}{4} + 1} = \overset{\circ}{10} + 7$

El gausiano es 4, entonces:

$m = (7^{431} + 1)(7^{1293} - 1)$

$m = (\underbrace{7^{\overset{\circ}{4}+3}} + 1)(\underbrace{7^{\overset{\circ}{4}+1}} - 1)$

$m = (\overset{\circ}{10} + 3 + 1)(\overset{\circ}{10} + 7 - 1)$

$m = (\overset{\circ}{10} + 4)(\overset{\circ}{10} + 6) = \overset{\circ}{10} + 4$

$\therefore$ El MCM(A; B) termina en 4.

Clave E

10. Por dato: $MCM(63A; 9B) = 12\,096$

$\Rightarrow MCM(7A; B) = 1344 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7$

$MCD(91A; 13B) = 104$

$\Rightarrow MCD(7A; B) = 8$

Luego: $B \neq \overset{\circ}{7}$, además $7A = \overset{\circ}{7}$ pero $7A \neq \overset{\circ}{49}$

Por lo tanto: $A \neq \overset{\circ}{7}$

Entonces: $MCM(A; B) = 2^6 \cdot 3$

$MCD(A; B) = 8$

$\left.\begin{array}{l} A = 8k_1 \\ B = 8k_2 \end{array}\right\}$ k_1 y k_2 son PESÍ; $k_1 \cdot k_2 = 2^3 \cdot 3$

Grupos para $(k_1; k_2)$:

$(1; 24) \vee (3; 8)$

$(2; 12) \vee (4; 6)$ (no son PESÍ)

Piden:

$(A + B)_{mín.} = 8(k_1 + k_2)$

& $(k_1 + k_2)_{mín.} = 10$

$\therefore (A + B)_{mín.} = 80$

Clave E

11. Por dato:

$MCM(\overline{anan} - 7; B) = MCM(\overline{anan} - 7; 11B)$ ...(1)

De (1), se deduce:

$\overline{anan} - 7 = \overset{\circ}{11}$

$101(\overline{an}) = \overset{\circ}{11} + 7$

$(\overset{\circ}{11} + 2)(\overline{an}) = \overset{\circ}{11} + 7$

$2(\overline{an}) = \overset{\circ}{11} - 4$

$\Rightarrow \overline{an} = \overset{\circ}{11} + 9$

Entonces:

$\overline{an} =$ 20; 31; 42; 53; 64; 75; 86; 97

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$

Donde:

S es la suma de todos los valores de (a + n).

$\Rightarrow S = 2(1 + 2 + 3 + ... + 8)$

$S = 2\left(\frac{8 \cdot 9}{2}\right) = 72$

$\therefore S = 72$

Clave C

12. Sean: a y b los números.

Del enunciado:

$a + b = 27$ ...(1)

$MCM(a; b) = 60$ ...(2)

Sea: $d = MCD(a; b)$

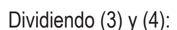
$\Rightarrow a = dk_1 \wedge b = dk_2$

(k_1 y k_2 son PESÍ)

Reemplazando en (1) y (2):

$d(k_1 + k_2) = 27$ ...(3)

$dk_1k_2 = 60$ ...(4)



Dividiendo (3) y (4):

$$\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}=\frac{9}{20}=\frac{4+5}{4.5}$$

$\Rightarrow k_1=4 \wedge k_2=5$

Reemplazando en (4): d = 3

$\Rightarrow a=12 \wedge b=15$

$\therefore$ a . b = 180

Clave C

13. $MCD(\overline{abc}_{(n)}; \overline{ab(c+1)}_{(n)})=\overline{(8-n)6(n-7)}_{(n)}-\overline{pq}$

$\overline{8-n>n} \wedge n-7\geq n \Rightarrow n=7$

$\overline{abc}_{(n)}=k$

$MCD(k; k+1)=160_{(7)}-\overline{pq}$

$1=91-\overline{pq}$

$\overline{pq}=90$

$\therefore$ 9 + 0 = 9

Clave B

14. Como piden la menor cantidad de ladrillos para formar un cubo compacto, entonces la longitud de la arista debe ser el MCM(12; 15; 18).

12	15	18	3
4	5	6	2
2	5	3	2
1	5	3	3
1	5	1	5
1	1	1	

$\Rightarrow$ MCM(12; 15; 18) = 180

$\Rightarrow$ n.° total de ladrillos $=\dfrac{180^3}{12.15.18}$

$\therefore$ n.° total de ladrillos = 1800

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 36) Unidad 2

Comunicación matemática

1.
- La unidad
- 2 y 3
- 2
- 3

2. 37; 41; 53

3. $264=2^3\times3\times11$
$315=3^2\times5\times7$
$300=2^2\times3\times5^2$
$715=5\times11\times13$

Razonamiento y demostración

4. I. F
$MCM(11^3; 11; 11^5)=11^5$
II. V
III. F
$MCM(8; 9)=8\times9=72$

5. I. F
MCD(A; B) = 1
II. F
$MCD(A; B)=A\times B$
III. F

Resolución de problemas

6. $N=\underbrace{2000\ldots000}_{n\ cifras}$

$N=2\times10^n$
$N=2^{n+1}\times5^n$
$CD_{\overset{\circ}{4}}=2^2(2^{n-1}\times5^n)$
$CD_{\overset{\circ}{4}}=(n)(n+1)=870$
↓ ↓
29 30
$\therefore$ n = 29

Clave A

7. $N=a^\alpha . b^\beta$

$CD(N)=CD_p+CD_c+1$
$CD(N)=2+12+1$
$CD(N)=15=3\times5$
$(\alpha+1)(\beta+1)=3\times5$
$\Rightarrow\alpha=2\wedge\beta=4$
SD(N) = 403

$$\left(\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\right)=403=13\times31$$

$$\left(\frac{a^3-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^5-1}{b-1}\right)=13\times31$$

$$\Rightarrow\frac{a^3-1}{a-1}=13 \wedge \frac{b^5-1}{b-1}=31$$

$a=3 \wedge b=2$
$N=3^2 . 2^4=144$
$\therefore$ Σ cifras de N = 9

Clave D

8. $45^n\times18=(5\times3^2)^n\times2\times3^2$
$5^n\times3^{2n}\times2\times3^2=2\times3^{2n+2}\times5^n$
CD = 2(2n + 3)(n + 1)
Los divisores que son $\overset{\circ}{15}$:
$5\times3\times(5^{n-1}\times2\times3^{2n+1})$
$CD_{\overset{\circ}{15}}=n\times2\times(2n+2)$
$CD_{\overset{\circ}{15}}=2n(2n+2)=4n(n+1)$

Cantidad de divisores que no son $\overset{\circ}{15}$:
$CD-CD_{\overset{\circ}{15}}=6(n+1)$

Clave D

9. $N=14^8(14^2-1)=2^8 . 7^8 . (195)$
$N=2^8 . 7^8 . 5 . 13 . 3$

$CD_N=(8+1)(8+1)(1+1)(1+1)(1+1)$
$CD_N=648$

Clave C

10. MCD(9A; 24B) = 30
MCD(3A; 8B) = 10
$\therefore$ MCD(15A; 40B) = 50

Clave D

11. MCD(15A; 20B) = 30
MCD(3A; 4B) = 6
MCD(12A; 16B) = 24
$\therefore$ 2 . 4 = 8

Clave B

12. $1524=127\times12$ 12 y n son números
$N=127\times n$ pesí

Como N es menor que 1524, (n) será menor que 12 y además PESÍ, de aquí los valores posibles de (n) son:
n = 1; 5; 7; 11

Clave E

13. MCD(15A; 21B) = 90
MCD(21A; 15B) = 135
MCD(5A; 7B) = 30
MCD(7A; 5B) = 45
N = MCD(5A; 7B; 7A; 5B) = MCD(5A; 7A; 7B; 5B)
N = MCD[MCD(5A; 7B); MCD(7A; 5B)]
N = MCD(30; 45)

Se tiene:
$MCD(5A; 7A)=A\times MCD(5; 7)=A$
$MCD(7B; 5B)=B\times MCD(7; 5)=B$

Para C:
MCD(5A; 7B; 7A; 5B)

Luego:
N = MCD(5A; 7A; 5B; 7B)
N = MCD[MCD(5A; 7A); MCD(7B; 5B)]
N = MCD(A; B)

$\Rightarrow$ MCD(30; 45) = MCD(A; B)
$\therefore$ MCD(A; B) = 15

Clave B

Nivel 2 (página 36) Unidad 2

Comunicación matemática

14. 14, 15, 22

15.

N	CD(N)	SID(N)	MCM(N; 3)
1224	24	2,87	1224
27	4	1,48	27
1260	36	3,47	1260
495	12	1,89	495
243	6	1,49	243

Razonamiento y demostración

16. I. V

Por el teorema de Wilson, como 11 es un número primo, entonces:
$10!=(11-1)!=\overset{\circ}{11}-1$

II. F
Sea m = MCM(A, B) y
d = MCD(A; B) entonces:
m = dpq; (p y q PESÍ)
$\frac{m}{d}=pq$
$\Rightarrow\left(\frac{d}{m}\right)^{-1}=pq\in\mathbb{Z}$

III. V
$\mathbb{Z}^+-\{1\}=\{2; 3; 4; 5; \ldots\}$
Si $N\in\mathbb{Z}^+-\{1\}$ entonces:
$N!=1\times2\times3\times\ldots\times N$
$\Rightarrow N!=\overset{\circ}{2}$

17. I. F

Si d = MCD(A; B; C), entonces:
$A=\overset{\circ}{d}; B=\overset{\circ}{d}$ y $C=\overset{\circ}{d}$

Luego: $A + B + C = \overset{\circ}{d}$

II. F

$(A + 1)! = A! \times (A + 1) = \overset{\circ}{A!}$

$\Rightarrow$ MCD(A!; (A + 1)!) = A!

III. V

$MCM(A; B) \times MCD(A; B) = A \times B$

$MCM(A; B) \times MCD(A; B) = MCM(A; B)$

$\Rightarrow$ MCD(A; B) = 1

$\therefore$ A y B son PESÍ

Clave B

Resolución de problemas

18. Por dato: a, b y c son primos absolutos y diferentes entre sí.

Luego:
$CD(a . b . c) = 2 . 2 . 2 = 8$
$CD(a^b . c) = (b + 1) . 2$

Del enunciado:
$CD(a . b . c) = CD(a^b . c)$
$8 = 2(b + 1)$
$4 = b + 1$
$\therefore b = 3$

Clave B

19. Sea:
$M = 161^{n+2}$ donde $CD(M) = \overline{n6}$
$M = (7 . 23)^{n+2}$
$M = 7^{n+2} . 23^{n+2} \Rightarrow (n + 3)(n + 3) = \overline{n6}$
$(n + 3)^2 = \overline{n6}$ cumple para: n = 3 y n = 1

Luego:
$N = 9^{n+1} - 9^{n-1} = 9^{n-1} . (9^2 - 1) = 3^{2n-2} . 80$
$N = 3^{2n-2} . 2^4 . 5$

Si: n = 1
$N = 2^4 . 5 \Rightarrow CD(N) = 5 . 2 = 10$
Si: n = 3
$N = 3^4 . 2^4 . 5 \Rightarrow CD(N) = 5 . 5 . 2 = 50$

Clave B

20. $A = 201\underbrace{000 \dots 00}_{n \text{ ceros}}{}_{(8)}$

$A = 2 \times 8^{n+2} + 8^n$
$A = 8^n(2 \times 8^2 + 1)$
$8^n(129)$
$A = 2^{3n} . 3 . 43$
$CD(\overset{\circ}{6}) = 2 \times 3(2^{3n-1} \times 43)$
$42 = 3n \times 2$
$21 = 3n$ & $n = 7$

Clave E

21. El menor divisor es 4, luego el mayor resto común que se podrá obtener es 3. Siendo, por lo tanto, el menor número buscado el MCM de 4; 7; 12 y 20 aumentado en 3.
MCM(4; 7; 12; 20) = 420
$\therefore$ El número buscado es 423

Clave B

22. $MCM[\underbrace{N!; N! + 1}_{\text{son PESÍ}}] = N! . (N! + 1)$

$MCD[N!; 7N!] = N!$

$\dfrac{MCM(N!; N! + 1)}{MCD(N!; 7N!)} = \dfrac{N!(N! + 1)}{N!} = N! + 1 = \overline{7ab}$
$\qquad\downarrow\qquad\downarrow\downarrow$
$6! + 1 = 721$

$\therefore a + b = 2 + 1 = 3$

Clave B

23. Del enunciado:

	3	2	2
aaaa	bbbb	2d	d
	2d	d	0

$\overline{bbbb} = 2 . 2d - d \Rightarrow \overline{bbbb} = 3d$ ...(1)
$\overline{aaaa} = 3 . \overline{bbbb} - 2d \Rightarrow \overline{aaaa} = 7d$ ...(2)

Dividiendo (2) entre (1):
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{7}{3} \Rightarrow a = 7 \wedge b = 3$ (a y b son cifras)
$\therefore a - b = 7 - 3 = 4$

Clave C

24. $MCD(128; \overline{abc3}) = \dfrac{N}{423} = 1$
$\quad\downarrow\qquad\downarrow$
$\overset{\circ}{2}$ No es $\overset{\circ}{2}$

128 y $\overline{abc3}$ son PESÍ $\Rightarrow$ N = 423

$MCM(N; 13) = \overline{...x}$
N y 13 son PESÍ.
$423 . 13 = \overline{...x} \Rightarrow 5499 = \overline{...x}$
$\therefore x = 9$

Clave D

25. MCD(m!; 17!) × MCM (m!; 17!)
$m! . 17! = \overline{...0000}$
$17! = 5^{\alpha} \dots$

$17 \,\underline{|\, 5}$ $\Rightarrow \alpha = 3$
$\;\;3$

Es decir:
17! = ...000

Luego:
m! × 17! = ...0000
m! × ...000 = ...0000
$\downarrow$
1 cero

Si: m! = 9! = ... 0
$\therefore m_{máx.} = 9$

Clave C

Nivel 3 (página 37) Unidad 2

Comunicación matemática

26.

27.

Razonamiento y demostración

28. I. F
7 y 5 son PESÍ pero 8 y 6 no lo son .

II. V
Por el teorema de Wilson:
$(p - 1)! = \overset{\circ}{p} - 1$
$(\overset{\circ}{p} - 1)(p - 2)! = \overset{\circ}{p} - 1$
$\overset{\circ}{p} - (p - 2)! = \overset{\circ}{p} - 1$
$(p - 2)! = \overset{\circ}{p} + 1$

III. V
CD[MCD(p; 5p)] = CD[p] = 2
$\Rightarrow$ p tiene 2 divisores
$\therefore$ p es un número primo.

29. I. V
Por propiedad:
MCD(A; B) = MCD(A + B; AB). Entonces, si MCD(A + B; AB) = 1, luego MCD(A;B) = 1

II. F
Sea: m = MCM(A; B) = MCM(A, nB)
Entonces:
$m = Ak_1 \wedge m = Bk_2$; $k_1; k_2 \in \mathbb{Z}$ (PESÍ)
Además:
$m = Ap_1 \wedge m = nBp_2$; $p_1; p_2 \in \mathbb{Z}$ (PESÍ)
Luego:
$m = Bk_2 = nBp_2$
$k_2 = np_2$
Como k_1 y $k_2 = np_2$ son PESÍ, entonces:
– k_1 y n son PESÍ
– k_1 y p_2 son PESÍ
Entonces:
$Ak_1 = nBp_2$
$A = \dfrac{nBp_2}{k_1}$; (k_1 va a dividir a B ya que es PESÍ con n y p_2)
$A = n\underbrace{\left(\dfrac{Bp_2}{k_1}\right)}$
$A = n \times p$; $p \in \mathbb{Z}^+$
$A = \overset{\circ}{n}$

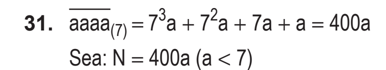
III. V
Como $p \neq q$ son primos absolutos, entonces son PESÍ.
Por el teorema de Euler.
$q^{\phi(p)} = \overset{\circ}{p} + 1 \Rightarrow q^{p-1} = \overset{\circ}{p} + 1$
$[q^{(p-1)}]^{(p-2)!} = \overset{\circ}{p} + 1$
$q^{(p-1)!} = \overset{\circ}{p} + 1$
Luego:
$q^{(p-1)!} - 1 = \overset{\circ}{p}$
$q^{(p-1)!} - 1 = pk$; $k \in \mathbb{Z}^+$
$\dfrac{q^{(p-1)!} - 1}{p} \in \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$
$\dfrac{q^{(p-1)!} - 1}{p} \in \mathbb{Z}$

Clave D

Resolución de problemas

30. Para que $\overline{ab}$ y 78 sean PESÍ, $\overline{ab}$ no tiene que ser divisible por ninguno de los divisores de 78.
78 = 2 × 3 × 13
Piden el mínimo valor de $\overline{ab}$:
$\overline{ab} = 17; 19; 23; \dots$
$\therefore \overline{ab}_{mín.} = 17$

Clave B



31. $\overline{aaaa}_{(7)} = 7^3a + 7^2a + 7a + a = 400a$

Sea: $N = 400a$ $(a < 7)$

Descomponemos canónicamente:

$N = 2^2 \times 10^2 \,.\, a$

$N = 2^2 \times 2^2 \times 5^2 \times a$; sea: $a = x^n$

$N = 2^4 \times 5^2 \times x^n$

$CD = 5(3)(n + 1) = 30$

$n + 1 = 2$

$n = 1$

$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5; 6$ $(a < 7)$

$\therefore a = 3$

Clave D

32. $10! = 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1$

$10! = 5 \,.\, 2 \,.\, 3^2 \,.\, 2^3 \,.\, 7 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 2^2 \,.\, 3 \,.\, 2$

$10! = 7 \,.\, 5^2 \,.\, 3^4 \,.\, 2^8 = 2(7 \,.\, 5^2 \,.\, 3^4 \,.\, 2^7)$

$CD_{PARES} = (2)(3)(5)(8) = 240$

Clave D

33. $N = 550!$

Hallemos los exponentes de 29 y 19 ya que estos factores son los que relacionan a 550! con 551!

$550 \,\underline{|29}$ → 18 $\qquad$ $550 \,\underline{|19}$ → $28 \,\underline{|19}$ → 1

$\Rightarrow a = 18$ $\qquad$ $\Rightarrow b = 29$

$\Rightarrow N = 550! = 29^a \,.\, 19^b \,.\, P = 29^{18} \,.\, 19^{29} \,.\, P$

$\Rightarrow C.\,D._{(N)} = (19)(30) \,.\, D_P = n$

$\Rightarrow D_P = \dfrac{n}{19 \,.\, 30}$

Ahora tenemos:

$M = 551! = 551 \,.\, 550! = 29 \,.\, 19 \,.\, 550!$

$M = 29^{19} \,.\, 19^{30} \,.\, P$

$C.\,D._M = (20)(31) \,.\, D_P = 20 \,.\, 31 \,.\, \dfrac{n}{19 \,.\, 30}$

$\therefore CD_M = \dfrac{62n}{57}$

Clave B

34. Por dato:

$(\overline{ab})^2 + (\overline{cd})^2 = 10\,530$ ...(1)

$MCM(\overline{ab}; \overline{cd}) = 297$ ...(2)

Además: $MCD(\overline{ab}; \overline{cd})$ tiene 3 divisores.

$\Rightarrow MCD(\overline{ab}; \overline{cd}) = k^2$

Donde: k es un número primo.

$\Rightarrow \overline{ab} = \alpha \,.\, k^2 \wedge \overline{cd} = \beta \,.\, k^2$ ...(3)

(α y β son PESÍ)

Reemplazando en (1):

$\alpha^2k^4 + \beta^2k^4 = (\alpha^2 + \beta^2)k^4 = 10\,530$

$(\alpha^2 + \beta^2)k^4 = 3^4 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 13 \Rightarrow k = 3$

Luego:

$\alpha^2 + \beta^2 = 130$ ...(I)

Además, de (2):

$MCM(\overline{ab}; \overline{cd}) = \alpha \,.\, \beta \,.\, k^2 = 11 \,.\, 3^3$

$\Rightarrow \alpha \,.\, \beta = 11 \,.\, 3$ ...(II)

De (I) y (II): $\alpha = 11$ y $\beta = 3$

(Cualquiera puede ser mayor en este caso).

Reemplazando en (3):

$\Rightarrow \overline{ab} = 11 \,.\, 9 = 99 \wedge \overline{cd} = 3 \,.\, 9 = 27$

Del enunciado:

	3	1	2
99	27	18	9
	18	9	0

$\Rightarrow p = 3; q = 1; r = 2$

$(\overline{pqr})! = 312!$

$312 \,\underline{|5}$

310 (62) $\underline{|5}$

2 60 (12) $\underline{|5}$

2 10 (2)

2

$\therefore$ 312! termina en:

$62 + 12 + 2 = 76$ ceros.

Clave B

35. Por dato:

$MCD(\overline{mnnm}; \overline{a48b}) = 33$ ...(1)

De (1):

$\overline{mnnm} = 1001m + 110n = 11(91m + 10n)$

Luego:

$\overset{\circ}{33} = 11(91m + 10n)$

$33p = 11(91m + 10n)$

$3p = 91m + 10n$

$\overset{\circ}{3} = m + n$; $(50 < \overline{mn} < 60)$

↓ ↓ ↓

5 1 5 (no es par)

5 4

$\Rightarrow m = 5$ y $n = 4$

Reemplazando en (1):

$MCD(5445; \overline{a48b}) = 33$

$MCD(33 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 11; 33 \,.\, q) = 33$

(q es PESÍ con 3; 5 y 11)

Como: $\overline{a48b} = \overset{\circ}{33} \begin{cases} \overset{\circ}{11} \\ \overset{\circ}{3} \end{cases}$

$\overline{a48b} = \overset{\circ}{11} \wedge a + b + 4 + 8 = \overset{\circ}{3}$

$a + b = \overset{\circ}{3}$

Entonces:

$b - 8 + 4 - a = \overset{\circ}{11}$

$b - a - 4 = \overset{\circ}{11}$

$b - a = \overset{\circ}{11} + 4$; $(b > a)$

↓ ↓

5 1 $\Rightarrow a + b = \overset{\circ}{3}$

6 2

7 3

8 4 $\Rightarrow a + b = \overset{\circ}{3}$

9 5

Si: $a = 1 \wedge b = 5$

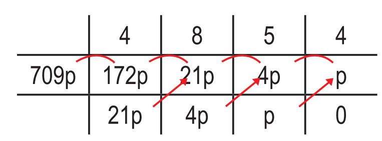
$\Rightarrow \overline{a48b} = 1485 = 33 \,.\, 45$

$q = \overset{\circ}{5}$ (falso)

$\Rightarrow a = 4 \wedge b = 8$

Sea: $p = MCD(\overline{cded}; \overline{fgh})$

Del enunciado:



	4	8	5	4
709p	172p	21p	4p	p
	21p	4p	p	0

$\overline{cded} = 709p \wedge \overline{fgh} = 172p$

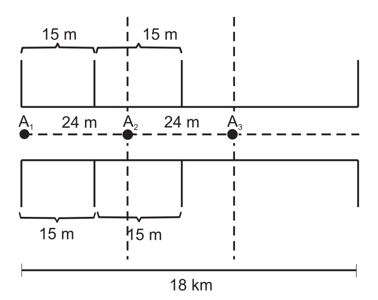
↓ ↓

3545 5 860 5

$\therefore \overline{cded} + \overline{fgh} = 4405$

Clave A

36. Del enunciado:



Luego: $MCM(15; 24) = 120$

Además:

b: n.° de árboles plantados.

a: n.° de veces que coinciden el límite de un lote y un árbol.

Entonces:

$b = \dfrac{18\,000}{24} + 1 = 751$

$a = \dfrac{18\,000}{120} + 1 = 151$

$\therefore a + b = 151 + 751 = 902$

Clave C

37. El tiempo que emplea en dar una vuelta cada uno es:

$t_A = \dfrac{7200}{72} = 100$ s

$t_B = \dfrac{7200}{90} = 80$ s

$t_C = \dfrac{7200}{60} = 120$ s

Luego: $MCM(100; 80; 120) = 1200$

Entonces:

n.° vueltas de A: $\dfrac{1200}{100} = 12$

n.° vueltas de B: $\dfrac{1200}{80} = 15$

n.° vueltas de C: $\dfrac{1200}{120} = 10$

$\therefore$ El producto: $12 \times 15 \times 10 = 1800$

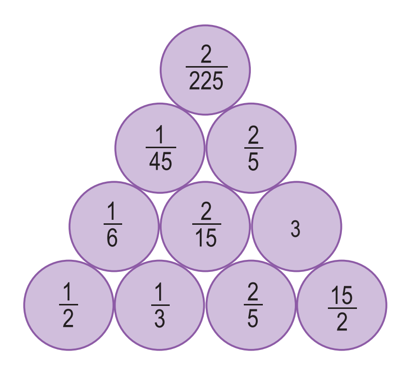
Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 41) Unidad 2

Comunicación matemática

1.



2.

Clasificación \ Fracción	$\frac{a}{11}$	$\frac{\overline{1b}}{23}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{\overline{3m4}}{100}$	$\frac{42}{15}$
Decimal			✓	✓	
Ordinaria	✓	✓			✓
Propia	✓	✓	✓		
Impropia				✓	✓
Reductible				✓	✓
Irreductible	✓	✓	✓		

3. a. $\frac{0}{\overline{1a}} = 0 \Rightarrow \frac{0}{\overline{1a}}$ (=) 0

b. $0,\widehat{24}_{(5)} = \frac{24_{(5)}}{44_{(5)}} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$

$0,14_{(6)} = \frac{14_{(6)}}{55_{(6)}} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

Como: $0,\widehat{24}_{(5)}$ (>) $0,14_{(6)}$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$\frac{7}{12}$ $\qquad$ $\frac{2}{7}$

c. Como: $\overline{5a7} > \overline{50a}$

$\Rightarrow \frac{\overline{5a7}}{\overline{50a}}$ (>) 1

d. $0,\widehat{23}_{(4)} = \frac{23_{(4)}}{33_{(4)}} = \frac{11}{15}$

$0,23_{(4)} = \frac{23_{(4)}}{100_{(4)}} = \frac{11}{16}$

$\Rightarrow 0,\widehat{23}_{(4)}$ (>) $0,23_{(4)}$

Razonamiento y demostración

4. I. (F)

$f = \frac{\bar{a}}{\overline{mn}} = \frac{\bar{a}}{10}$ es una fracción decimal.

II. (V)

$f = \frac{a}{\overline{mn}} = \frac{a}{43}$, es una fracción propia e irreductible.

III. (F)

$\frac{713}{899} = \frac{31 \times 23}{31 \times 29} = \frac{23}{29}$

5.

I. (F)
El número de cifras decimales va estar dado por el mayor exponente de 2 ó 5, en nuestro ejemplo es 4.

II. (F)

III. (V)

Clave E

Resolución de problemas

6.

$R = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{90}$

$R = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{9 \times 10}$

$R = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$

$R = 1 - \frac{1}{10}$

$\therefore R = \frac{9}{10}$

Clave E

7. 1.ª pérdida: $\frac{1}{6}(2400) = 400$

Queda: $2400 - 400 = 2000$

2.ª pérdida: $\frac{1}{2}(2000) = 1000$

Queda: $2000 - 1000 = 1000$

3.ª pérdida: $\frac{1}{4}(1000) = 250$

$\therefore$ Pierde en total:
$400 + 1000 + 250 =$ S/.1650

Clave E

8. Sea C la cantidad de dinero que tiene Juan.

G	NG (queda)
3k	5k

Queda: $\frac{3}{4}(5k) = 30$

$\Rightarrow k = 8$

$\therefore C = 8k = 8(8) =$ S/.64

Clave E

9. Del enunciado:

$\frac{3}{7} < \frac{a}{24} < 1$

$10,285... < a < 24$

$a \in \{11; 12; 13; ...; 23\}$

$\therefore$ Existen 13 fracciones.

Clave A

10.

$MCD(0,75; 0,625; 1,4) = MCD\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{7}{5}\right)$

Por propiedad:

$MCD\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{7}{5}\right) = \frac{MCD(3;5;7)}{MCM(4;8;5)} = \frac{1}{40}$

Clave C

Nivel 2 (página 41) Unidad 2

Comunicación matemática

11.

$\frac{8}{3} + \frac{5}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$ ——— 4

$\frac{15}{7} \div \frac{5}{21} = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{7}_{1}} \times \frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{5}_{1}} = 9$ ——— 9

$\frac{26}{4} \times \frac{5}{13} \times \frac{14}{5} = \frac{14}{2} = 7$ ——— 7

12.

a. $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = \frac{21}{15} = \frac{28}{20}$

b. $\frac{3}{11} = \frac{6}{22} = \frac{9}{33} = \frac{12}{44}$

c. $0,1\hat{6} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90}$

d. $0,\widehat{14}_{(7)} = \frac{14_{(7)}}{66_{(7)}} = \frac{11}{48}$

e. $0,13_{(5)} = \frac{13_{(5)}}{100_{(5)}} = \frac{8}{25}$

13.

I. (F)

$\frac{a}{b} < 1 \wedge a\,.\,c > b\,.\,d$

$1 > \frac{a}{b} > \frac{d}{c}$

$\Rightarrow 1 > \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{c}{d} > 1$

$\therefore$ f es impropia.

II. (F)

Sea: $b = 3 \wedge d = 6 \Rightarrow MCD(3, 6) = 3 \neq 1$

$\frac{23}{16}$ no es una fracción reductible.

III. (V)

$MCM\left(\frac{7}{2014}; \frac{2}{2015}; \frac{5}{2016}\right)$

$= \frac{MCM(7;2;5)}{MCD(2014;2015;2016)}$

$\therefore = \frac{70}{1} = 70$

14.

$\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow a > b \Rightarrow am > bm$

$\Rightarrow am + ab > bm + ab$

$\Rightarrow a(m + b) > b(m + a)$

$\frac{a}{b} > \frac{m + a}{m + b}$

Resolución de problemas

15. Del enunciado:

$$7\frac{5}{32};\ 7\frac{23}{128};\ 7\frac{11}{64};\ 7\frac{45}{256}$$

$$\underbrace{7\frac{40}{256}}_{\text{varilla más corta}};\ \underbrace{7\frac{46}{256}}_{\text{varilla más larga}};\ 7\frac{44}{256};\ 7\frac{45}{256}$$

Del enunciado, piden:

$$x = 7\frac{46}{256} - 7\frac{40}{256}$$

$$x = \frac{(256 \times 7 + 46)}{256} - \frac{(256 \times 7 + 40)}{256}$$

$$\therefore\ x = \frac{6}{256} = \frac{3}{128}$$

Clave C

16. Sea n la cantidad inicial de agua.

1.ª hora aumenta: $\frac{n}{3}$

2.ª hora aumenta: $\frac{1}{4}\left(n + \frac{n}{3}\right) = \frac{n}{3}$

3.ª hora aumenta: $\frac{1}{2}\left(n + \frac{2n}{3}\right) = \frac{5n}{6}$

Falta llenar: $\frac{n}{6}$

Además:

$$\frac{n}{3} + \frac{n}{3} + \frac{5n}{6} = 378$$

$$\frac{9n}{6} = 378 \Rightarrow\ n = 252 \text{ litros}$$

La capacidad del cilindro será:

$$C = 252 + 378 + \frac{252}{6}$$

$$\therefore C = 672 \text{ litros}$$

Clave E

17. Del enunciado:

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\ldots\frac{41}{40} = a,b\widehat{c}$$

$$\frac{41}{18} = a,b\widehat{c}$$

$$2,2\widehat{7} = a,b\widehat{c}$$

$$\Rightarrow\ a = 2;\ b = 2;\ c = 7$$

$$\therefore\ \frac{a}{b+c} = \frac{2}{9} = 0,\widehat{2}$$

Clave B

18. Por dato:

$$\frac{177}{243} = 0,\widehat{ab\ldots cd}$$

$$0,\widehat{728395061} = 0,\widehat{ab\ldots cd}$$

$$\Rightarrow a = 7;\ b = 2;\ c = 6;\ d = 1$$

$$\therefore\ a + b + c + d = 16$$

Clave D

19. $\frac{\overline{mn}}{\overline{mp}} = 0,\widehat{amp}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{mn}}{\overline{mp}} = \frac{\overline{amp}}{999} = \frac{\overline{amp}}{27\,.\,37}\ \ldots(1)$$

$$\Rightarrow \overline{mp} = 27\ \vee\ \overline{mp} = 37$$

- Si $\overline{mp} = 27 \Rightarrow m = 2 \wedge p = 7$

Reemplazando en (1):

$$\overline{2n}\,.\,37 = \overline{a27}$$

$$\underbrace{\overset{\downarrow}{1}}$$

$777 \neq \overline{a27}$ (no cumple)

$\Rightarrow \overline{mp} = 37$

$m = 3 \wedge p = 7$

Reemplazando en (1):

$$\overline{3n}\,.\,27 = \overline{a37}$$

$$\underbrace{\overset{\downarrow}{1}}$$

$837 = \overline{a37} \Rightarrow a = 8$

$\therefore\ a + m + n + p = 19$

Clave B

20. $\frac{a}{\overline{ab}} = 0,\widehat{mn(2a)} = \frac{\overline{mn(2a)}}{999}$ ...(1)

De (1): $a \in \{1; 2; 3; 4\}$

Además:

$$\frac{a}{\overline{ab}} = \frac{\overline{mn(2a)}}{27\,.\,37}\ \ldots(2)$$

$\Rightarrow (a = 2 \vee a = 3) \wedge b = 7$

- Si $a = 3$
  $3\,.\,27 = \overline{mn6}$
  $81 = \overline{mn6}$ (no cumple)

- Si $a = 2$, luego en (2):
  $2\,.\,37 = \overline{mn4}$ (m puede ser cero)
  $\downarrow\downarrow$
  $0\ 7$
  $\therefore\ a + b + m + n = 16$

Clave D

Nivel 3 (página 21) Unidad 2

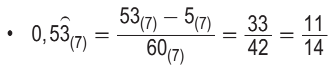
Comunicación matemática

21. Veamos:

- $0,2\widehat{5}_{(7)} = \frac{25_{(7)} - 2_{(7)}}{60_{(7)}} = \frac{17}{42}$
- $\text{MCD}\left(\frac{\overline{a3}}{5};\ \frac{4}{3};\ \frac{3}{2}\right) = \frac{\text{MCD}(\overline{a3};4;3)}{\text{MCM}(5;3;2)} = \frac{1}{30}$
- $\frac{1}{12}.\text{MCM}\left(\frac{2}{97};\frac{5}{\overline{a7}};\frac{1}{\overline{b3}}\right)$
  $= \frac{\text{MCM}(2;5;1)}{12\text{MCD}(97;\overline{a7};\overline{b3})} = \frac{10}{12}$
  $= \frac{5}{6}$

22.

- $\text{MCM}\left(\frac{2}{n};\ \frac{3}{n+1}\right) = \frac{\text{MCM}(2;3)}{\text{MDC}(n;n+1)}$
  $= \frac{6}{1} = 6$
- $\text{MCD}\left(\frac{\overline{b2}}{47};\frac{5}{6}\right) = \frac{\text{MCD}(\overline{b2};5)}{\text{MCM}(47;6)} = \frac{1}{282}$
- $\frac{5}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{50 + 12 - 15}{30} = \frac{47}{30}$
- $\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{2}\right)\times\frac{5}{6} = \left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{5}{6} = \frac{2}{9}$



- $0,5\widehat{3}_{(7)} = \dfrac{53_{(7)} - 5_{(7)}}{60_{(7)}} = \dfrac{33}{42} = \dfrac{11}{14}$
- $0,\widehat{53}_{(7)} = \dfrac{53_{(7)}}{66_{(7)}} = \dfrac{38}{48} = \dfrac{19}{24}$
- $0,53_{(7)} = \dfrac{53_{(7)}}{100_{(7)}} = \dfrac{38}{49}$
- $0,5\widehat{7} = \dfrac{57-5}{90} = \dfrac{52}{90} = \dfrac{26}{45}$

$\therefore$ La palabra descubierta es IGUALDAD.

Razonamiento y demostración

23. a) V

$f = \dfrac{a}{b}$ es irreductible, entonces a y b son PESÍ; luego a + b y b también son PESÍ.

Por lo tanto:

$f + 1 = \dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{a+b}{b}$ es irreductible

b) F

Del enunciado: $f < 1$ e irreductible, entonces:

$$f = \frac{\overline{(a+b)c}_{(2n)} - \overline{(a+b)c}_{(n)}}{2(\overline{ab} + \overline{ba})}$$

$$f = \frac{(a+b)\times(2n) + c - (a+b)\times n - c}{2(11a+11b)}$$

$$f = \frac{n\cancel{(a+b)}}{22\cancel{(a+b)}} = \frac{n}{22} \quad (\text{ya que } a + b \neq 0)$$

Se debe cumplir: $n < 22$; n y 22 son PESÍ

Se sabe que:

$\phi(22) = \overset{\circ}{2} \times (2-1) \times \overset{\circ}{11} \times (11-1) = 10$

Es decir, hay 10 números PESÍ con 22 y menores que él, estos son:

n: 1, $\underbrace{3;\ 5;\ 7,\ 9;\ 13,\ 15;\ 17,\ 19;\ 21}_{9 \text{ valores}}$

↑ No puede ser ya que n es base.

c) F

$$E = \frac{3^{23} \times 3^{28}}{(21)^{51} \times 7^2} = \frac{3^{51}}{3^{51} \times 7^{53}} = \frac{1}{7^{53}}$$

Entonces E tiene la forma:

$$\frac{1}{7^{53}} = 0,\widehat{abc...x} = \frac{\overline{abc...x}}{999...9}$$

$\Rightarrow 999...\,9 = \overline{abc...x} \times (7^4)^{13} \times 7$

$999...\,9 = \overline{abc...\,x} \times (...1) \times 7$

$999...\,9 = \overline{abc...\,x} \times (...7)$

↓ 7

$\Rightarrow \quad x = 7$

24. Si $\dfrac{f_1}{f_2} \in \mathbb{Z}^+$ entonces:

$\dfrac{f_1}{f_2} = n \in \mathbb{Z}^+$

$f_1 = nf_2$

$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2 n}{b_2}$

$a_1 b_2 = a_2 b_1 n$

Entonces: $a_1 b_2 = \overset{\circ}{a_2} \ \wedge \ a_1 b_2 = \overset{\circ}{b_1}$

Como b_2 y a_2 son PESÍ, entonces por el principio de Euclides: $a_1 = \overset{\circ}{a_2}$

Como a_1 y b_1 son PESÍ, por el principio de Euclides se cumple: $b_2 = \overset{\circ}{b_1}$

Resolución de problemas

25. $\dfrac{28}{\overline{xy}} > 1 \Rightarrow 28 > \overline{xy} \neq \overset{\circ}{3}$

$\Rightarrow \overline{xy} \in \{26;\ 25;\ 23;\ 22;\ 20;\ 19;\ 17;\ 16;\ 14;\ 13;\ 11;\ 10\}$

$\therefore$ Hay 12 fracciones impropias.

Clave D

26.

$0,\widehat{abcd} = \dfrac{\overline{dcba}}{1111}$

$\dfrac{\overline{abcd}}{9999} = \dfrac{\overline{dcba}}{1111}$

$\overline{abcd} = 9 \times \overline{dcba}$

Luego:

$d = 1;\ a = 9;\ b = 8;\ c = 0$

$\therefore a + b + c - d = 16$

Clave A

27. $\dfrac{8}{a \times b} = \dfrac{15}{a \times c} = \dfrac{10}{b \times c} = \dfrac{1}{k}$

$\dfrac{a \times b}{8} = \dfrac{a \times c}{15} = \dfrac{b \times c}{10} = k$

$a \times b = 8k$ ...(1)

$a \times c = 15k$ ...(2)

$b \times c = 10k$ ...(3)

$\Rightarrow (abc)^2 = 1200k^3$ ...(4)

Realizando (2) × (3) ÷ (1):

$\Rightarrow c^2 = 18,75k \Rightarrow c = 15$

↓ $12(k_{\text{mínimo}})$

Reemplazando en (2) y (3):

$a = 12 \ \wedge \ b = 8$

$\therefore a + b + c + k = 47$

Clave E

28. $\dfrac{23}{n-7} = \dfrac{1}{k}$

$23k = n - 7$

$23k + 7 = n$

1	30
2	⇒ 53
3	76
4	99
5	122
6	⇒ 145
7	168
8	191
9	214

9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25 ; ...

+4 +4 +4 +4

$t_n = 9 + (n-1)4$

$n = 12 \Rightarrow t_n = 53$

$n = 35 \Rightarrow t_n = 145$

$\therefore 53 + 145 = 198$

Clave D

29. Del problema:

$\dfrac{\overline{ab}_{(4)}}{100_{(4)}} = \dfrac{\overline{bac}_{(6)}}{1000_{(6)}};\ 0 < b < 4,\ c < 6$

$\dfrac{4a + b}{\cancel{16}\ 2} = \dfrac{36b + 6a + c}{\cancel{216}\ 27}$

$108a + 27b = 72b + 12a + 2c$

$\underbrace{96a}_{\overset{\circ}{3}} = \underbrace{45b}_{\overset{\circ}{3}} + \underbrace{2c}_{\overset{\circ}{3}}$ ... (1)

$\Rightarrow \quad c = 3\,m$

Luego:

$96a = 45b + 6m$

$\underbrace{32a}_{\overset{\circ}{2}} = \underset{\overset{\circ}{2}}{15b} + \underbrace{2m}_{\overset{\circ}{2}}$

Como: $b = \overset{\circ}{2} \Rightarrow b = 2$

Entonces:

$32a = 30 + 2m$

$16a = 15 + m$

↓ 1 ↓ 1

$\Rightarrow a = 1;\ b = 2 \ \wedge \ c = 3m = 3$

$\therefore a + c - b = 1 + 3 - 2 = 2$

Clave A

30.

$$a\frac{b}{c} = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{6}{7} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{18}{19} + \frac{1}{21}\right)$$

$$a\frac{b}{c} = \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + ... + \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{21}\right)$$

$$a\frac{b}{c} = 9(1) + \frac{1}{21} = 9\frac{1}{21}$$

$\Rightarrow a = 9;\ b = 1 \ \wedge \ c = 21$

$\therefore a + b + c = 31$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 46) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

Razón	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{13}$	4	$\frac{15}{17}$
Antecedente	7	4	11	1,2	15
Consecuente	5	12	13	0,3	17

2. a) $\boxed{13} - 8 = \boxed{8} - 3$

b) $\frac{\boxed{3}}{15} = \frac{\boxed{15}}{75}$

c) $15 - \boxed{11} = 11 - \boxed{7}$

d) $\frac{7}{\boxed{21}} = \frac{\boxed{21}}{63}$

3.

A	C	O	N	S	E	C	U	E	N	T	E	U	C	V
E	O	B	R	E	A	C	A	L	L	A	O	P	A	N
D	B	I	X	M	D	I	S	C	R	E	T	A	P	E
C	E	A	E	P	U	G	C	O	Y	P	P	U	R	O
M	C	R	X	A	P	A	E	N	E	I	E	N	O	F
A	A	E	T	R	C	T	C	T	N	E	R	M	P	I
R	S	N	R	E	P	O	A	I	M	D	R	S	O	A
A	N	T	E	C	E	D	E	N	T	E	O	M	R	R
Z	T	R	M	U	A	M	O	U	S	I	D	A	C	I
O	R	I	O	N	V	A	S	A	F	N	S	I	I	T
N	I	O	S	I	E	R	I	A	R	T	Z	L	O	M
E	A	S	I	O	G	E	O	M	E	T	R	A	N	S

Razonamiento y demostración

4. a) (F)

$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3k}{4k} \Rightarrow b - a = 3$

$4k - 3k = 3$

$k = 3$

Luego:

$a \times b = (3k)(4k) = 12k^2 = 12(9) = 108$

b) (F)

$\frac{2,\widehat{7} + 1,\widehat{2}}{2} = \frac{\frac{27-2}{9} + \frac{12-1}{9}}{2} = \frac{36}{18} = 2$

c) (V)

$\frac{a}{b} = 3 \Rightarrow a = 3b$

Además:

$\frac{a+b}{2} = 8 \Rightarrow \frac{3b+b}{2} = 8$

$\frac{4b}{2} = 8$

$2b = 8$

$b = 4 \Rightarrow a = 12$

Luego: $a^2 \times b = 144 \times 4 = 576$

5. a) $\boxed{F}$

$\frac{b}{\sqrt{a} + b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{a} + b = 2b$

$\sqrt{a} = b$

Media geométrica $= \sqrt{ab} = \sqrt{b^2 . b} = \sqrt{b^3}$

b) $\boxed{V}$

$\frac{p}{q} = \frac{3}{8}$

Como p y q son PESÍ, entonces:

p = 3 y q = 8, luego:

$a^p = q \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a^3 = 2^3$

$\Rightarrow a = 2$

c) $\boxed{V}$

$\frac{3 + 0,\widehat{5}}{2} = \frac{3 + \frac{5}{9}}{2} = \frac{32}{9 \times 2} = \frac{16}{9} = 1,\widehat{7}$

Resolución de problemas

6. Sea b la media proporcional.

$b = \sqrt{9 . 36}$

$b = 3 . 6 = 18$

Clave B

7. Del enunciado:

$A = \frac{C}{3} = \frac{B}{2} = k$

$\Rightarrow A = k,\ C = 3k$ y $B = 2k$

Además: $A + B = 12$

Entonces:

$3k = 12 \Rightarrow k = 4$

$\therefore C = 3k = 3(4) = 12$

Clave C

8. Del enunciado:

$\frac{12 + x}{27 + x} = \frac{51 + x}{81 + x} = k$

$\frac{51 + x - (12 + x)}{81 + x - (27 + x)} = k$

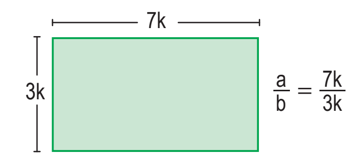
$\frac{51 - 12}{81 - 27} = k$

$\frac{39}{54} = k$

$\therefore\ k = \frac{13}{18}$

Clave D

9. Sea la relación:



$\frac{a}{b} = \frac{7k}{3k}$

a: largo

b: ancho

Perímetro:

2(10k) = 1metro <> 100 cm

20k = 100 cm

k = 5 cm

Piden el largo:

a = 7(5 cm) = 35 cm

Clave A

10. Proporción geométrica continua:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \Rightarrow \begin{matrix} b = ck \\ a = ck^2 \end{matrix}$

k: primo, $a + 2b + c = 72$

$ck^2 + 2ck + c = 72$

$c(k + 1)^2 = 72$

$k = 2;\ c = 8;\ 8(2 + 1)^2 = 8 . 9$

$k = 1;\ c = 18;\ 18(1 + 1)^2 = 4 . 18$

$k = 5;\ c = 2;\ 2(5 + 1)^2 = 36 . 2$

$c = 2 \wedge k = 5$

Piden:

$ck^2 . ck . c . ck = (ck)^4 = (10)^4 = 10\,000$

Clave D

Nivel 2 (página 46) Unidad 2

Comunicación matemática

11. n.° primos = {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31}

$\Rightarrow x = 11$

Números $\overset{\circ}{3}$ = {3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30}

Números $\overset{\circ}{11}$ = {11; 22}

$\Rightarrow y = 12$

Nos piden: $\frac{x}{y} = \frac{11}{12}$

Clave A

12. $\frac{x + 1}{8} = \frac{x + 7}{16}$

$2x + 2 = x + 7$

$\Rightarrow x = 5$

$Área_{\Delta} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$

Clave B

Razonamiento y demostración

13. a) (F)

$11(5a + b) = 7(5b + a)$

$55a + 11b = 35b + 7a$

$48a = 24b$

$2a = b$

$\downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 2$

$2 \quad 4$

Si $a > 1 \Rightarrow b = 4$

b) (F)

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - m$

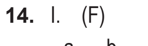
$\frac{1}{6} = \frac{1}{4} - m$

$m = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{2}{24} \Rightarrow m = \frac{1}{12}$

c) (V)

$\frac{n}{x} = \frac{x}{n^3} \Rightarrow n^4 = x^2$

$\Rightarrow x = n^2$



14. I. (F)

$\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{4+3+2} = \frac{27}{9} = 3$

Luego:

$a = 12, b = 9 \wedge c = 6$

$\Rightarrow a - c = 6$

II. (V)

$\frac{a+b}{11} = \frac{a-b}{7} = \frac{ab}{72} = k \quad ...(1)$

$\frac{a+b+(a-b)}{11+7} = \frac{a+b-(a-b)}{11-7} = k$

$\frac{a}{9} = \frac{b}{2} = k \Rightarrow a = 9k \ \wedge \ b = 2k$

Reemplazando en (1):

$\frac{(9k)(2k)}{72} = k \Rightarrow k = 4$

$a = 9k = 9(4) = 36 > 35$

III. (V)

$\frac{U}{5} = \frac{N}{3} = \frac{I}{7} = k$

Luego: $\sqrt{25k^2 - 9k^2} = 20$

$4k = 20 \Rightarrow k = 5$

$I = 7k = 7(5) = 35 = \overset{\circ}{5}$

$\Rightarrow I = \overset{\circ}{5}$

Clave C

Resolución de problemas

15. Por dato:

$\frac{Ca}{Mi} = \frac{2}{3}$; $\frac{Mi}{Cr} = \frac{7}{5}$

Luego:

$Ca = 2 \cdot 7k = 14k$

$Mi = 3 \cdot 7k = 21k$

$Cr = 5 \cdot 3k = 15k$

Además:

$Cr - Ca = 2$

$15k - 14k = 2$

$\Rightarrow k = 2$

$\therefore$ Ca = 14k = 14(2) = 28 años

Clave A

16.

	Bailan	No bailan
M	7m . 4	3m . 4
H	7m . 4	m

Mujeres bailan: 28m

Hombres bailan: 28m

Mujeres no bailan: 12m

Hombres no bailan: m

Total: 69m

$69m > 100$

$\downarrow$

2

$\therefore$ La mínima cantidad de personas es 138.

Clave C

17.

	$-2m$		$+m$
José	$2k - 2m$	$2k$	$2k + m$
Manuel	$3k - 2m$	$3k$	$3k + m$

$\frac{2k-2m}{3k-2m} = \frac{2}{5}$

$10k - 10m = 6k - 4m$

$4k = 6m$

$m = \frac{2k}{3}$

Del enunciado:

$2k + m + 3k + m = 76$

$5k + 2m = 76$

$5k + 2\left(\frac{2k}{3}\right) = 76$

$\frac{19k}{3} = 76$

$k = 12$

$\therefore$ José: 2k = 2(12) = 24 años

Clave B

18. $\frac{40}{A} = \frac{A}{10} \Rightarrow A^2 = 400 \Rightarrow A = 20$

$\frac{8}{12} = \frac{12}{B} \Rightarrow 8B = 144 \Rightarrow B = 18$

$72 - 60 = 42 - C$

$\Rightarrow C = 30$

Reemplazamos:

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

$\frac{20}{18} = \frac{30}{D}$

$\therefore D = 27$

Clave E

19. $\frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3} = \frac{xy}{16} = k$

$\Rightarrow x + y = 5k$

$x - y = 3k$

$\Rightarrow x = 4k \wedge y = k$

Por dato:

$xy = 16k$

$4k \cdot k = 16k$

$\Rightarrow k = 4$

Reemplazando:

$x = 4(4) = 16 \Rightarrow$ es mayor

$y = 4$

Piden la suma de cifras del número mayor: $1 + 6 = 7$

Clave B

20. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = a \times c$

$\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{1}{25}$

$\frac{a^2 + a \times c}{a \times c + c^2} = \frac{1}{25}$

$\frac{a(a+c)}{c(c+a)} = \frac{1}{25}$

$\Rightarrow a = k$

$c = 25k$

$b^2 = a \cdot c$

$b^2 = k \cdot 25k \Rightarrow b = 5k$

Por dato:

$\underbrace{a + b + c}_{31k} = 93$

$\Rightarrow k = 3$

$a = 3; b = 15; c = 75$

$\therefore a \cdot b = 3(15) = 45$

Clave B

Nivel 3 (página 47) Unidad 2

Comunicación matemática

21. a) $3 \times 8 = 24 \longrightarrow$ O

b) $4 + 8 = 12 \longrightarrow$ T

c) $3 + 8 = 11 \longrightarrow$ P

d) $2(3) = 6 \longrightarrow$ R

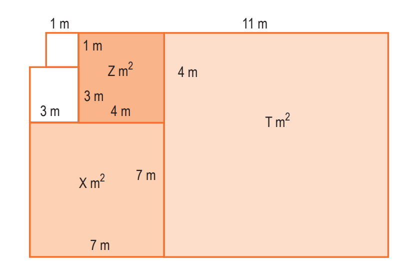
e) $3 + 6 = 9 \longrightarrow$ S

f) $8 \longrightarrow$ E

g) $4 + 6 = 10 \longrightarrow$ E

6	8	9	11	10	12	24
R	E	S	P	E	T	O

22. Sea R: cuarta diferencial de X, Z y T.



Del gráfico:

$Z = 16; X = 49 \wedge T = 121$

Luego:

$X - Z = T - R$

$49 - 16 = 121 - R$

$33 = 121 - R$

$\therefore R = 88$

Clave D

Razonamiento y demostración

23. $\left.\begin{aligned} a_1 &= b_1k \\ a_2 &= b_2k \\ a_3 &= b_3k \\ &\vdots \\ a_n &= b_nk \end{aligned}\right\} (+)$

a) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = (b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n)k$

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n} = k$

b) $a_1a_2a_3 ... a_n = (b_1 b_2 b_3 ... b_n)k^n$

$\frac{a_1 a_2 a_3 ... a_n}{b_1 b_2 b_3 ... b_n} = k^n$

24. a) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$

$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

b) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

- $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$

$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ... (1)

- $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$

$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ... (2)

Dividiendo (1) y (2):

$$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\frac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c-d}{d}}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

Resolución de problemas

25. $\frac{\sqrt{a^2+120}}{20}=\frac{\sqrt{b^2+270}}{30}=\frac{\sqrt{c^2+480}}{40}=k$

$$\underbrace{\frac{a^2+120}{4}}_{I}=\underbrace{\frac{b^2+270}{9}}_{II}=\underbrace{\frac{c^2+480}{16}}_{III}=100k^2$$

Igualando (I) y (III):

$16a^2+1920=4c^2+1920$

$16a^2=4c^2$

$2a=c$

Igualando (I) y (II);

$9a^2+1080=4b^2+1080$

$2b=3a \Rightarrow b=\frac{3a}{2}$

Por dato:

$a+b+c=36$

$a+\frac{3a}{2}+2a=36$

$\frac{9a}{2}=36$

$a=8 \wedge b=12 \wedge c=16$

$\therefore\ a\,.\,b\,.\,c=1536$

Clave D

26. Se extrae:

Alcohol $2k \longrightarrow 1k$
Agua $3k \longrightarrow 1{,}5k$

Alcohol $y \longrightarrow 1/3y$
Agua $5y \longrightarrow 5/3y$

Se extraen cantidades iguales:

$k+1{,}5k=\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}y$

$2{,}5k=2y$

$y=\frac{5}{4}k$ ...(1)

Se extraen 51 L de alcohol:

$k+\frac{1}{3}y=51$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$k+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\right)k=51$

$\frac{17}{12}k=51$

$k=36 \Rightarrow y=45$

Volumen del agua al inicio:

$3k+5y=3(36)+5(45)=333$ l

Clave B

27. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$

Del enunciado:

$\frac{a+d}{b+c}=\frac{4}{5}$ ...(1)

Además:

$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}=k$

$\Rightarrow d=a=bk,\ c=bk^2$

Reemplazando en (1):

$\frac{2bk}{b(k^2+1)}=\frac{4}{5}$

$5k=2k^2+2$

$\Rightarrow k=2 \vee k=\frac{1}{2}$

Además:

Si: $k=2$

$b(k^2+2k+1)=b(k+1)^2=b\,.\,9\geq 100$

$\Rightarrow b=12$

$\Rightarrow a=d=24 \wedge c=48$

Si $k=\frac{1}{2}$, entonces:

$b(k^2+2k+1)=b(k+1)^2=\frac{9b}{4}\geq 100$

$b=48$

$\Rightarrow a=d=24 \wedge c=12$

$\therefore$ El mayor término es 48.

Clave B

28. Sea: $x=a-b;\ y=a+c \wedge z=b+c$

Luego:

$$\frac{\frac{m}{x^2}+\frac{n}{y^2}}{p}=\frac{\frac{n}{z^2}-\frac{p}{x^2}}{m}=\frac{\frac{p}{y^2}+\frac{m}{z^2}}{n}$$

$$\underbrace{\frac{\frac{mp}{x^2}+\frac{np}{y^2}}{p^2}=\frac{\frac{nm}{z^2}-\frac{pm}{x^2}}{m^2}}=\frac{\frac{pn}{y^2}+\frac{mn}{z^2}}{n^2}$$

$$\frac{\frac{np}{y^2}+\frac{nm}{z^2}}{p^2+m^2}=\frac{\frac{pn}{y^2}+\frac{nm}{z^2}}{n^2}$$

$\Rightarrow p^2+m^2=n^2$

Clave A

29. Del enunciado:

- $a+d=b+c$
- $7d=a+b+c+d=a+d+\underbrace{b+c}_{a+d}$

$5d=2a$

$\Rightarrow a=5;\ d=2 \wedge b+c=7$

Entonces:

$\frac{5+c}{5-c}=\frac{b+2+2}{b-2}$

$\frac{5+c-(5-c)}{5+c+(5-c)}=\frac{b+4-(b-2)}{b+4+(b-2)}$

$\frac{2c}{10}=\frac{6}{2b+2}$

$\Rightarrow \frac{c}{5}=\frac{3}{b+1}$ ...(2)

$\frac{7-b}{5}=\frac{3}{b+1}$

$7b+7-b^2-b=15$

$0=b^2-6b+8$

b $\quad -4$
b $\quad -2$

$\Rightarrow b=2 \vee b=4$

$\therefore b=4$

Clave C

30.

- $\frac{A+x}{B+x}=\frac{a+x}{b+x}=5$

$\frac{A+x-(a+x)}{B+x-(b+x)}=5 \Rightarrow \frac{A-a}{B-b}=5$ ... (1)

- $\frac{B+m}{C+m}=\frac{b+m}{c+m}=3$

$\frac{B+m-(b+m)}{C+m-(c+m)}=3 \Rightarrow \frac{B-b}{C-c}=3$ ... (2)

Además:

$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$

Entonces:

$\frac{A}{A-a}=\frac{B}{B-b}=\frac{C}{C-c}$

$\Rightarrow \frac{A}{A-a}=\frac{B}{B-b} \wedge \frac{B}{B-b}=\frac{C}{C-c}$

$\frac{A}{B}=\frac{A-a}{B-b}=5 \qquad \frac{B}{B-b}=\frac{C}{C-c}$

$\Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{5.3}{1.3} \wedge \frac{B}{C}=\frac{3}{1}$

$\Rightarrow A=15k;\ B=3k \wedge C=k$

Como:

$A+B=54$

$15k+3k=54 \Rightarrow k=3$

$\therefore C=3$

Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA (página 49)

1. $\overline{a(a+c)c} = \overset{\circ}{14}$

$100a + 10(a+c) + c = \overset{\circ}{14}$

$110a + 11c = \overset{\circ}{14}$

$11(10a + c) = \overset{\circ}{14}$

$10a + c = \overset{\circ}{14}$

$\overline{ac} = \overset{\circ}{14} = 14k$

↓↓

14

42

70

Por lo tanto, hay 3 números.

Clave A

2. Sea n el número de alumnos en cada aula.

Del enunciado:

$3n = \overset{\circ}{7} + 2 = \overset{\circ}{7} + 2 + 7$

$3n = \overset{\circ}{7} + 9 \Rightarrow 3n - 9 = \overset{\circ}{7}$

$3(n-3) = \overset{\circ}{7}$

$n - 3 = \overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow n = \overset{\circ}{7} + 3$

Por lo tanto, sobran 3 alumnos.

Clave C

3. $17^{36^{251}} \times 13^{13^{13}} = \overline{abc...mnx}_{(6)}$

$(\overset{\circ}{6} - 1)^{36^{251}} \times (\overset{\circ}{6} + 1)^{13^{13}} = \overset{\circ}{6} + x$

$(\overset{\circ}{6} + (-1)^{36^{251}}) \times (\overset{\circ}{6} + 1^{13^{13}}) = \overset{\circ}{6} + x$

$(\overset{\circ}{6} + 1)(\overset{\circ}{6} + 1) = \overset{\circ}{6} + x$

$\overset{\circ}{6} + 1 = \overset{\circ}{6} + x$

$\therefore x = 1$

Clave A

4. $A = 10 \,.\, 20 \,.\, 30 \,.\, \ldots \,.\, 10$

$A = 10^{10} \,.\, (1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \ldots \,.\, 10)$

$A = 10^{10} \,.\, 10!$

Hallamos los exponentes de 2 y 5 en 10!

$10 \,\lfloor 2$ → $5 \,\lfloor 2$ → $2 \,\lfloor 2$ → 1 $\qquad$ $10 \,\lfloor 5$ → 2

$\Rightarrow a = 8$ $\qquad$ $\Rightarrow b = 2$

$A = 5^{10} \,.\, 2^{10} \,.\, 2^{a} \,.\, 5^{b} \,.\, P = 2^{18} \,.\, 5^{12} \,.\, P$

$CD(A) = 19 \,.\, 13 \,.\, D_P = n \Rightarrow D_P = \dfrac{n}{19 \,.\, 13}$

$B = 5^{10} \,.\, (1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.10)$

$B = 5^{10} \,.\, 10!$

$10 \,\lfloor 2$ → $5 \,\lfloor 2$ → $2 \,\lfloor 2$ → 1 $\qquad$ $10 \,\lfloor 5$ → 2

$\Rightarrow a = 8$ $\qquad$ $\Rightarrow b = 2$

$B = 5^{10} \,.\, 2^{a} \,.\, 5^{b} \,.\, P = 5^{12} \,.\, 2^{8} \,.\, P$

$CD(B) = 13 \,.\, 9 \,.\, D_P = 13 \,.\, 9 \,.\, \dfrac{n}{19 \,.\, 13}$

$CD(B) = \dfrac{9}{19}n$

Clave C

5. $16^{n} = (2^{4})^{n}$ tiene p divisores

$\Rightarrow 4n + 1 = p$

Luego:

$256^{n} = 2^{8n}$

2^{8n} tiene $8n + 1$ divisores, es decir:

$8n + 1 = 2(4n + 1) - 1$

$8n + 1 = 2p - 1$

Por lo tanto, 256^{n} tiene $2p - 1$ divisores.

Clave C

6. $N = 4^{n} \,.\, 9^{m}$

$CD(N) = 49$

$49 = (n + 1)(m + 1)$

$\Rightarrow n = 6 \wedge m = 6$

$\Rightarrow N = 4^{6} \,.\, 9^{6} = 2^{12} \,.\, 3^{12}$

$\therefore CD(N) = (12 + 1)(12 + 1) = 169$

Clave E

7. MCD(14A; 21B) = 560

MCD(2A; 3B) = 80 ...(1)

MCM(18A; 27B) = 2160

MCM(2A; 3B) = 240 ...(2)

MCM(2A; 3B) . MCD.(2A; 3B) = 2A . 3B

240 . 80 = 6 . A . B

A . B = 3200

MCD(A. B; 140) = MCD(3200; 140)

3200 –	140	2
1600 –	70	2
800 –	35	5
160 –	7	

$\Rightarrow 2^{2} \,.\, 5 = 20$

$\therefore \Sigma\text{cifras} = 2 + 0 = 2$

Clave E

8. $MCD(128; \overline{abc3}) = \dfrac{N}{423} = 1$

↓

$\neq \overset{\circ}{2}$

128 y $\overline{abc3}$ son PESÍ

$\Rightarrow N = 423$

N y 13 son PESÍ

$MCM(N; 13) = \overline{...x}$

$423 \,.\, 13 = \overline{...\,x} \Rightarrow 5499 = \overline{...x}$

$\therefore x = 9$

Clave D

9. $MCD(\overline{a0}; \overline{b3(2b)}) = 18$

- $\overline{a0} = \overset{\circ}{18}$

  $10a = \overset{\circ}{18}$

  $5a = \overset{\circ}{9}$

  $a = \overset{\circ}{9}$

  $\Rightarrow a = 9$

- $\overline{b3(2b)} = \overset{\circ}{18}$

  $102b + 30 = \overset{\circ}{18}$

  $2b < 10$

  $\Rightarrow b < 5$

  $\Rightarrow b = 2$

Piden:

MCM(29; 28) = 29 . 28 = 812

$\therefore \Sigma\text{cifras} = 8 + 1 + 2 = 11$

Clave C

10.

Raúl	José
$\dfrac{3}{4} = 3 \,.\, \dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

Raúl: por mes \$240

José: por mes \$80

Le descuentan: $\dfrac{1}{32} \times 80 = 2{,}5$

Al final, José mensualmente paga = 80 – 2,5 = \$77,5

Clave B

11. $\dfrac{N}{D}$ es irreductible N y D son PESÍ.

$\dfrac{N + 7}{D + 5} = \dfrac{N}{D}$

$ND + 7D = ND + 5N$

$7D = 5N$

↓ ↓

5 7

$\dfrac{N}{D} = \dfrac{7}{5}$

Clave D

12. $\dfrac{\sqrt{a^2 + 49}}{7} = \dfrac{\sqrt{b^2 + 64}}{8} = \dfrac{\sqrt{c^2 + 144}}{12} = k$

$\underbrace{\dfrac{a^2 + 49}{49}}_{\text{I}} = \underbrace{\dfrac{b^2 + 64}{64}}_{\text{II}} = \underbrace{\dfrac{c^2 + 144}{144}}_{\text{III}} = k^2$

Igualando (I) y (II): 8a = 7b

Igualando (II) y (III): 12b = 8c

$b = \dfrac{8}{12}c$

$a = \dfrac{7b}{8} \Rightarrow a = \dfrac{7}{12}c$

$c^2 + a - b = 3595$

$c^2 + \dfrac{7}{12}c - \dfrac{8}{12}c = 3595$

$c^2 - \dfrac{c}{12} = 3595$

$12c^2 - c = 12 \,.\, 3595$

$\Rightarrow c = 60$

$\Rightarrow b = 40 \wedge a = 35$

$\Rightarrow a \,.\, b \,.\, c = 84\,000$

$\therefore 8 + 4 + 0 + 0 + 0 = 12$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 52) Unidad 3

1. A DP B $\Rightarrow \frac{A}{B} = k$

Del enunciado:

$\frac{10}{4} = \frac{15}{x} \Rightarrow 10x = 60$

$\therefore x = 6$

Clave B

2. $\frac{A \cdot C^3}{\sqrt{B}} = k$

Entonces: $\frac{3 \cdot 2^3}{\sqrt{256}} = \frac{24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\sqrt{B}}$

$\frac{3 \cdot 8}{16} = \frac{3}{\sqrt{B}} \Rightarrow \sqrt{B} = 2$

$\therefore B = 4$

Clave B

3. Del gráfico:

- Analizando cuando A DP B:
  $\frac{x}{2} = \frac{20}{4} \Rightarrow x = 10$
- Analizando cuando A IP B:
  $4 \cdot 20 = 16 \cdot y \Rightarrow y = 5$
  $\therefore x^2 + y^2 = 10^2 + 5^2 = 125$

Clave E

4. $\frac{A.C^2}{\sqrt{B}} = k$

$\frac{3 \cdot 8^2}{\sqrt{16}} = \frac{6 \cdot 4^2}{\sqrt{B}}$

$\sqrt{B} = 2 \Rightarrow B = 4$

Clave D

5.

DP DP

$$1320 \begin{cases} A & \sqrt{13^2 \cdot 7} & 13k \\ B & \sqrt{14^2 \cdot 7} & 14k \\ C & \sqrt{17^2 \cdot 7} & 17k \end{cases}$$

$44k = 1320$

$\Rightarrow k = 30$

Por lo tanto:

La mayor cantidad es: $C = 17k = 510$

Clave A

6. Sabemos: (n.° de dientes) (n.° de vueltas) = cte.

Luego:

$24nV_A = 36nV_B = 45nV_C$;

MCM (24; 36; 45) = 360

$\frac{nV_A}{15} = \frac{nV_B}{10} = \frac{nV_C}{8}$

$\frac{nV_A - nV_C}{15 - 8} = \frac{nV_B}{10}$

$\frac{168}{7} = \frac{nV_B}{10}$ $\therefore nV_B = 240$

Clave A

7. Sea N la cantidad repartida.

DP

$$N \begin{cases} A_1 & 1k \\ A_2 & 2^2k \\ A_3 & 3^2k \\ \vdots & \\ A_9 & 9^2k \end{cases}$$

$A_9 - A_1 = 400$

$81k - k = 400 \Rightarrow k = 5$

Luego:

$N = 1^2k + 2^2k + 3^2k + ... + 9^2k$

$N = k(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 9^2)$

$N = 5\left(\frac{9(10)(19)}{6}\right)$

$\therefore N = 1425$

Clave B

8. $\frac{\text{precio}}{(\text{peso})^2} = \text{cte.}$

$\frac{720}{(6k)^2} = \frac{x}{k^2} = \frac{y}{(2k)^2} = \frac{z}{(3k)^2}$

$\frac{720}{36} = \frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{9}$

$\Rightarrow x = S/.20;\ y = S/.80;\ z = S/.180$

$\Rightarrow x + y + z = 280$

$\therefore$ La pérdida sufrida es:

720 – 280 = S/.440

Clave D

9. $\frac{E}{V.I.T} = k$

Entonces: $\frac{E}{6 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{2E}{24 \cdot 10 \cdot t}$

$\frac{1}{180} = \frac{1}{120t}$

$120t = 180$

$\therefore t = 1,5$ min = 90 s

Clave D

10. Resolución:

DP DP

$$14\,280 \begin{cases} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ \vdots \end{cases} \text{n cantidades} \quad \begin{matrix} 1^2k \\ 2^2k \\ 3^2k \\ 4^2k \\ n^2k \end{matrix}$$

Del enunciado:

$n^2k - 1^2k = 2304$

$k(n^2 - 1) = 2304$ ...(1)

Además:

$1^2k + 2^2k + 3^2k + 4^2k + ... + n^2k = 14\,280$

$k(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = 14\,280$

$\frac{k \cdot n(n+1)(2n+1)}{6} = 14\,280$ ...(2)

Dividiendo (1) y (2):

$\frac{6(n-1)(n+1)}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{2304}{14\,280}$

$\therefore n = 17$

Clave A

11. En el primer reparto:

$\frac{A}{1} = \frac{B}{2} = \frac{C}{3} = \frac{D}{4} = \frac{N}{10}$

$\Rightarrow A = \frac{N}{10};\ B = \frac{N}{5};\ C = \frac{3N}{10};\ D = \frac{2N}{5}$

En el segundo reparto:

$\frac{E}{2} = \frac{F}{3} = \frac{G}{4} = \frac{H}{6} = \frac{N}{15}$

$\Rightarrow E = \frac{2N}{15};\ F = \frac{N}{5};\ G = \frac{4N}{15};\ H = \frac{2N}{5}$

Del dato: C – G = 180

$\Rightarrow \frac{3N}{10} - \frac{4N}{15} = 180 \Rightarrow N = 5\,400$

Por lo tanto: $D = \frac{2}{5}(5400) = S/.2160$

Clave C

12. Sean A, B y C las cantidades repartidas.

DP IP <> DP

$$\begin{cases} 3^n & 4^{n+1} & \frac{1}{4^{n-1}} \Rightarrow \frac{3^n}{4^{n-1}} = 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ 3^{n-1} & 4^{n+1} & \frac{1}{4^{n+1}} \Rightarrow \frac{3^{n-1}}{4^{n+1}} = \frac{1}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ 3^{n+1} & 4^n & \frac{1}{4^n} \Rightarrow \frac{3^{n+1}}{4^n} = \frac{9}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{cases}$$

Luego: $\frac{A}{3} = \frac{B}{1/16} = \frac{C}{9/4} = k$

$\Rightarrow A = 3k;\ B = \frac{k}{16};\ C = \frac{9k}{4}$

Por dato: $3k - \frac{9k}{4} = 216 \Rightarrow k = 288$

Piden:

$3k + \frac{k}{16} + \frac{9k}{4} = \frac{85}{16}k = \frac{85(288)}{16} = 1530$

Clave E

13. Sea T el total a repartir.

Si nace niña:

niña $= \frac{2}{5}T$ mujer $= \frac{3}{5}T$

$\Rightarrow \frac{\text{mujer}}{\text{niña}} = \frac{3}{2}$ ...(1)

Si nace niño:

niño $= \frac{3}{5}T$ mujer $= \frac{2}{5}T$

$\Rightarrow \frac{\text{mujer}}{\text{niño}} = \frac{2}{3}$ ...(2)

De (1) y (2)

$\frac{\text{niño}}{9} = \frac{\text{niña}}{4} = \frac{\text{mujer}}{6} = \frac{76\,000}{9+4+6}$

Por lo tanto: mujer = S/. 24 000

Clave E

14. Sea $C = c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n$

Del enunciado:

Si A es DP B y B es DP C $\Rightarrow$ A es DP C

Luego: A/C = constante

Entonces:

$\frac{1024}{\underbrace{1+3+5+...+31}_{16 \text{ términos}}} = \frac{A}{\underbrace{2+4+6+...+32}_{16 \text{ términos}}}$

$\frac{1024}{16^2} = \frac{A}{2(1+2+3+...+16)} \Rightarrow A = 1088$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 54) Unidad 3

Comunicación matemática

15.

16. a)

n.° obreros	2	3	4	5	6
n.° días	30	20	15	12	10

b)

n.° obreros	2	4	6	10	16
obra (m^2)	5	10	15	25	40

17. Del gráfico:

- $\frac{12}{3} = \frac{a}{5}$
  $\Rightarrow a = 20$
- $12 . 3 = 4 . b$
  $\Rightarrow b = 9$
  $\therefore a + b = 20 + 9 = 29$

Clave D

Razonamiento y demostración

18.

I. F
II. V
III. V
Ya que A DP B $\Rightarrow A^n$ DP B^n $\forall n \in \mathbb{N}$
IV. V

Clave A

5. I. F $\Rightarrow \frac{A}{B^2} = \frac{A^*}{(3B)^2} \Rightarrow A^* = 9A$

II. F $\Rightarrow \frac{A}{B^2} = \frac{\left(\frac{A}{4}\right)}{(B^*)^2} \Rightarrow 4(B^*)^2 = B^2$
$B^* = \frac{B}{2}$

III. V $\Rightarrow \frac{A}{B^2} = \frac{A^*}{(2B)^2} \Rightarrow A = 4A$

Clave D

Resolución de problemas

6. $\frac{A}{B^2} = k$

$\frac{16}{2^2} = \frac{A}{8^2} \Rightarrow A = \frac{16 . 8^2}{2^2}$

$A = 256$

Clave A

7. $PT = k$

$T(300) = 125 . 48$
$T = 20$

Clave B

8. Como f(x) es una función de proporcionalidad directa: $f(x) = xk$

Piden:

$M = \frac{f(7) + f(12)}{f(10)}$

$M = \frac{7k + 12k}{10k} = \frac{19k}{10k} = 1,9$

Clave B

9.

DP

$700 \begin{cases} 10 \rightarrow 10k \\ 11 \rightarrow 11k \\ 14 \rightarrow 14k \end{cases}$ $\quad 10k + 11k + 14k = 700$
$35k = 700$
$\Rightarrow k = 20$

Por lo tanto, la menor cantidad es: $10k = 200$

Clave B

10.

IP DP

$470 \begin{cases} 3 & \frac{1}{3}(60) = 20 \rightarrow 20k \\ 4 & \frac{1}{4}(60) = 15 \rightarrow 15k \\ 5 & \frac{1}{5}(60) = 12 \rightarrow 12k \end{cases}$

$20k + 15k + 12k = 470$
$47k = 470$
$\Rightarrow k = 10$

Por lo tanto la menor parte es: $12k = 120$

Clave B

Nivel 2 (página 54) Unidad 3

Comunicación matemática

11.

12.

Razonamiento y demostración

13. I. V

Si A DP B $\Rightarrow \frac{A}{B} = k$
$A = Bk$

Luego:

$\frac{A-B}{B} = \frac{Bk - B}{B} = \frac{B(k-1)}{B} = \underbrace{k-1}_{\text{constante}}$

II. F

Del enunciado:

Si A IP B^2 $\Rightarrow A^3$ IP B^6
$A^3 . B^6 = k$ ... (1)

Si B^3 IP $C^2 \Rightarrow B^6$ IP C^4
$B^6 . C^4 = m$ ... (2)

Dividiendo (1) y (2):

$\frac{A^3}{C^4} = \frac{k}{m} \longrightarrow$ constante

Luego: A^3 DP C^4

III. V

Si A DP B $\Rightarrow \frac{A}{B} = k$
$A = Bk$ ... (1)

Si B IP C $\Rightarrow B . C = m$
$B = \frac{m}{C}$ ... (2)

Si C DP $\frac{1}{D} \Rightarrow \frac{C}{\frac{1}{D}} = n$
$CD = n$
$C = \frac{n}{D}$ ... (3)

De (1), (2) y (3) tenemos:

$A = Bk = \left(\frac{m}{C}\right)k = \frac{mk}{\frac{n}{D}} = \frac{Dmk}{n}$

$\Rightarrow \frac{A}{D} = \frac{mk}{n} \rightarrow$ constante

$\therefore$ A DP D

Clave C

14. I. V

Si A DP B $\Rightarrow \frac{A}{B} = k$ ... (1)

Si B DP C $\Rightarrow \frac{B}{C} = m$ ... (2)

Multiplicando miembro a miembro (1) y (2):

$\frac{A}{B} . \frac{B}{C} = km \Rightarrow \frac{A}{C} = km \longrightarrow$ constante
$\Rightarrow$ A DP C

II. V

$\frac{A-B}{C} = k \Rightarrow A - B = Ck$... (1)

$\frac{D}{C} = m \Rightarrow D = Cm$ ... (2)

Luego, reemplazamos (1) y (2) en:

$(A-B)\left(\frac{1}{D-C}\right) = \frac{Ck}{Cm-C} = \frac{Ck}{C(m-1)} = \frac{k}{m-1}$

Entonces: (A – B) IP 1/(D – C)

III. V

Si A IP B $\Rightarrow AB = k$ ... (1)
Si B IP C $\Rightarrow BC = m$ ... (2)

Dividiendo (1) entre (2):

$\frac{A}{C} = \frac{k}{m} = cte \Rightarrow$ A DP C

Clave E

Resolución de problemas

15. $\frac{\text{demanda . ingreso}}{\text{precio . utilidad}} = \text{cte.}$

$\frac{30 . 120\ 000}{200 . 5} = \frac{(30+45)x}{210 . 5}$

$3600 = \frac{75 . x}{1050}$

$\therefore x = S/.50\ 400$

Clave D

16.

DP

$2500 \begin{cases} 2^{20} \rightarrow 1n \\ 2^{23} \rightarrow 2^3 n \\ 2^{24} \rightarrow 2^4 n \end{cases}$

$n + 8n + 16n = 2500$
$n = 100$
$\therefore 16n = 1600$

Clave B

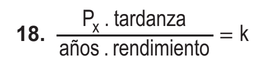
17.

Soldados	Horas/d	Días	Esfuerzo	Obra
72	10	10	100	1
90 + a	12	5	100	$\frac{4}{5}$

$720\ 000 \times \frac{4}{5} = (90 + a)\, 12 \times 5 \times 100$

$576\ 000 = (90 + a)6000$
$96 = 90 + a$
$6 = a$

Clave D

18. 

$$\frac{P_x \,.\, \text{tardanza}}{\text{años . rendimiento}} = k$$

$$\frac{P_A \,.\, 40}{15 \,.\, 80} = \frac{P_B \,.\, 30}{12 \,.\, 90} = \frac{P_C \,.\, 35}{10 \,.\, 70}$$

$$\frac{P_A}{15} = \frac{P_B}{18} = \frac{P_C}{10} = k$$

$\Rightarrow 43k = 1290$

$k = 30$

$\therefore P_B = 18 \,.\, 30 = \text{S/.}540$

Clave E

19. (longitud)(peso) = cte.

4,4 es el valor de las pesas, y P_1 y P_2 son el peso del azúcar.

- $P_1 \,.\, 22 = 4{,}4 \,.\, 20$
  $\Rightarrow P_1 = 4$ kg
- $4{,}4 \,.\, 22 = P_2 \,.\, 20$
  $\Rightarrow P_2 = 4{,}84$ kg
  $\Rightarrow P_1 + P_2 = 8{,}84$ kg
  $\therefore$ Dio de más: $8{,}84 - 8{,}8 = 0{,}04$ kg $= 40$ g

Clave C

20. Como hay 8 panes y comparten en partes iguales cada uno come 8/3.

Lo que comparte cada pastor con el cazador es:

$$16 \begin{cases} A: 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3} & 7 \to 7k \\ B: 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} & 1 \to k \end{cases} \quad (\text{DP})$$

$7k + k = 16 \Rightarrow k = 2$

$\Rightarrow A = 7k = 14$ y $B = 2$

Por lo tanto, le corresponde a cada pastor S/.14 y S/. 2

Clave C

Nivel 3 (página 55) Unidad 3

Comunicación matemática

21. Del gráfico:

$a_1 < a_2$ ... (1)

$a_3 < a_2$

Cuando: A IP B

$a_1 \,.\, a_4 = a_2 \,.\, a_2 = 3a_1 \,.\, a_3 = 36$ ... (2)

$\Rightarrow a_2 = 6 \;\wedge\; a_1 \,.\, a_3 = 12$ ... (3)

1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1

De (1) y (3), tenemos:

$\Rightarrow a_1 \,.\, a_3 = 12$

↓ ↓

3 4

4 3

Si $a_1 = 4 \;\wedge\; a_3 = 3$

Reemplazando en (2): $a_4 = 9$

Cuando A DP B

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_2}{a_5} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{6}{a_5} \Rightarrow a_5 = 13{,}5 \notin \mathbb{Z}^+$$

Entonces: $a_1 = 3 \;\wedge\; a_3 = 4$

Reemplazando en (2): $a_4 = 12$

Cuando: A DP B

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_2}{a_5} = \frac{3a_1}{a_6}$$

$$\frac{3}{12} = \frac{6}{a_5} = \frac{3(3)}{a_6} \Rightarrow a_5 = 24 \;\wedge\; a_6 = 36$$

$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_5 + a_6 = 85$

Clave C

22. Si $M = 10 \Rightarrow U^a$ IP S^b

Si $S = 6 \Rightarrow U^a$ DP M^c

- Luego:
  $$\frac{U^a S^b}{M^c} = k \quad \ldots (1)$$
- Reemplazando algunos valores del cuadro en (1), tenemos:
  $$\frac{10^a \,.\, 18^b}{10^c} = \frac{30^a \,.\, 6^b}{10^c} = \frac{270^a \,.\, 6^b}{30^c} \quad \ldots (2)$$
  $10^a \,.\, 18^b = 30^a \,.\, 6^b \;\wedge\; \frac{30^a}{10^c} = \frac{270^a}{30^c}$
  $3^b = 3^a \qquad 3^c = 9^a$
  $\Rightarrow a = b \qquad \Rightarrow c = 2a$
- Reemplazando en (1):
  $$\frac{U^a \,.\, S^a}{M^{2a}} = \left(\frac{U \,.\, S}{M^2}\right)^a = k \quad \ldots (3)$$
- Reemplazando en (3) algunos valores del cuadro:
  $$\left(\frac{10 \,.\, 18}{10^2}\right)^a = \left(\frac{15 \,.\, x}{15^2}\right)^a = \left(\frac{72 \,.\, y}{(x+13)^2}\right)^a$$
- Luego: $\frac{18}{10} = \frac{x}{15} = \frac{72 \,.\, y}{(x+13)^2}$ ... (4)
- Resolviendo (4) tenemos:
  $x = 27 \;\wedge\; y = 40$
  $\therefore x^2 + y^2 = 2329$

Clave D

Razonamiento y demostración

23. I. F

Sean L y A la longitud y el área de un triángulo equilátero.

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{A}{L^2} = k$$

A DP L^2

II. F

En un MRU se cumple: $d = vt$

Luego: v IP t

III. V

Si A^3 DP $B \Rightarrow \frac{A^6}{B^2} = k$ ... (1)

Si B^2 IP $1/C \Rightarrow \frac{B^2}{C} = m$ ... (2)

Si C DP $D^6 \Rightarrow \frac{C}{D^6} = n$ ... (3)

Multiplicando (1); (2) y (3):

$$\frac{A^6}{B^2} \,.\, \frac{B^2}{C} \,.\, \frac{C}{D^6} = kmn \longrightarrow \text{cte.}$$

$$\frac{A^6}{D^6} = \text{cte.} \Rightarrow \frac{A}{D} = \text{cte.}$$

Luego: A DP D

Clave D

24. I. V

$g(2) + g(3) = \overline{abc} = \overline{mnp}_{(5)} = q^2$ ... (1)

Luego:

$g(2) + g(3) = q^2$

$\frac{k}{2} + \frac{k}{3} = q^2$

$\frac{5}{6}k = q^2$

$\quad \hookrightarrow 6 \,.\, 5 \,.\, s^2$

Reemplazando en (1), tenemos:

$\overline{mnp}_{(5)} = 25s^2$

$25m + 5n + p = 25s^2$

$\quad p \to \overset{\circ}{5} \Rightarrow p = 0$

$5m + n = 5s^2$

$\quad n \to \overset{\circ}{5} \Rightarrow n = 0$

$m = s^2$

$\frac{1}{4} \Rightarrow \overline{abc} \neq 100_{(5)} = 25$ no cumple

Reemplazando los valores obtenidos, tenemos:

$g(2) + g(3) = \overline{abc} = 400_{(5)}$

$\frac{5k}{6} = 100 \Rightarrow k = 120$

Luego: $g(x) = \frac{120}{x}$

Entonces:

$$\frac{g(20)\,g(30)}{g(60)} = \frac{\frac{k}{20} \cdot \frac{k}{30}}{\frac{k}{60}} = \frac{k}{10} = \frac{120}{10}$$

II. V

$f(3) + f(7) = 20$

$3k + 7k = 20$

$10k = 20 \Rightarrow k = 2$

Luego:

$$f\left(\frac{21}{5}\right)f(5)f(7) = \frac{21}{5}k \,.\, 5k \,.\, 7k = 147k^3$$

$$= 147(2)^3 = 1176$$

III. F

$f(100) = 1200 \qquad g(2) = 15$

$100k = 1200 \qquad m/2 = 15$

$\Rightarrow k = 12 \qquad \Rightarrow m = 30$

Luego:

$f(a^2) = 2700 \qquad g(2) = 15$

$a^2 \,.\, 12 = 2700 \qquad m/2 = 15$

$a^2 = \frac{900}{4} \qquad \Rightarrow m = 30$

$a = 15 \qquad g(\sqrt[3]{b}) = 6$

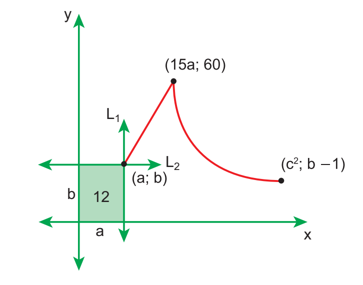
$\therefore b - a = 110 \qquad \frac{30}{\sqrt[3]{b}} = 6$

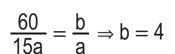
$b = 125$

Clave C

Resolución de problemas

25.





$\frac{60}{15a} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = 4$

$15a \,.\, 60 = c^2 \,.\, 3$

$300a = c^2 \qquad ...(1)$

- Además:
  $a \,.\, b = 12$
  $a \,.\, 4 = 12 \Rightarrow a = 3$

- Reemplazando a = 3 en (1):
  $300(3) = c^2 \Rightarrow c = 30$

  $\therefore \ \frac{c}{a} + \frac{b}{b-a} = \frac{30}{3} + \frac{4}{4-3} = 14$

Clave D

26. $3a_1 \,.\, a_3 = a_2^2 = a_1 \,.\, a_4$

$\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_2}{a_5} = \frac{3a_1}{a_6} \Rightarrow \frac{a_4}{a_6} = \frac{1 \times 3}{3 \times 3}$

Luego:

$\frac{a_4}{3} = \frac{a_6}{9} = \frac{a_3}{1} = k \qquad ...(1)$

$3a_1a_3 = a_2^2$

$3ka_1 = a_2^2$

$\ \ \downarrow \ \ \ \ \downarrow$

$\ \ 3 \ \ \ \ 6$

$\Rightarrow k = 4 \ \wedge \ a_1 = 3 \ \wedge \ a_2 = 6$

Reemplazando en (1):

$a_4 = 12;\ a_6 = 36;\ a_3 = 4$

Hallando a_5:

$\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_2}{a_5} \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{6}{a_5} \Rightarrow A_5 = 24$

Por lo tanto:

$a_1 = 3$
$a_2 = 6$
$a_3 = 4$
$a_4 = 12$ Suma de valores = 85
$a_5 = 24$
$a_6 = 36$

Clave D

27.

E	3	12	1	21	9
V	5	20	5	M	45
Y	2	2	18	50	N

E DP V

E^2 IP Y $\Rightarrow \frac{E\sqrt{Y}}{V} = k$

$\frac{21 \,.\, \sqrt{50}}{M} = \frac{1 \,.\, \sqrt{18}}{5}$

$\frac{21 \,.\, 5\sqrt{2}}{M} = \frac{1 \,.\, 3\sqrt{2}}{5}$

$M = 175$

Hallando N:

$\frac{9 \,.\, \sqrt{N}}{45} = \frac{1 \,.\, \sqrt{18}}{5}$

$N = 18$

$\Rightarrow M + N = 175 + 18 = 193$

Clave E

28. El 1.^{er} pastor divide cada pan, de los 5 que tiene, en tres partes. El 2.° pastor hace lo mismo con sus tres panes.

- Luego:
  1.^{er} pastor $\Rightarrow$ $5 \times 3 = 15$ trozos de pan
  2.° pastor $\Rightarrow$ $3 \times 3 = 9$ trozos de pan

En total hay 24 trozos de pan.
Los pastores comparten con una tercera persona:
$24 \div 3 = 8$ $\Rightarrow$ trozos para cada uno
El 1.^{er} pastor come 8 y comparte 7.
El 2.° pastor come 8 y comparte 1.

- Entonces:
  $\frac{A}{1} = \frac{B}{7} = \frac{A+B}{8} \Rightarrow \frac{A}{1} = \frac{B}{7} = \frac{8440}{8}$

  $\frac{A}{1} = \frac{B}{7} = 1055$

  $\Rightarrow$ A = 1055 y B = 7385

$\therefore$ El que tiene 5 panes recibe S/.7385.

Clave A

29. Del enunciado:

- Si B = 2
  $\frac{16}{(2)^2} = \frac{A}{(9)^2} \Rightarrow A = 324$

- Si B = 9
  $324 \,.\, \sqrt{9} = A \,.\, \sqrt{16}$
  $324 \,.\, 3 = A \,.\, 4 \Rightarrow A = 243$

- Si B = 16
  $4\log A + 5\log B = \log A^4 + \log B^5 \Rightarrow$ cte.
  $= \log A^4B^5 = k$
  $\Rightarrow A^4B^5 = 10^k = m \qquad ...(1)$

De (1):

$243^4 \,.\, 16^5 = (\overline{mn})^4(\overline{pq})^5$

$\downarrow\downarrow$

$8\ 1$

$(3^5)^4 \,.\, (2^4)^5 = (\overline{mn})^4(3^4)^5$

$3^{20} \,.\, 2^{20} = (\overline{mn})^4\, 3^{20}$

$2^5 = \overline{mn}$

$32 = \overline{mn}$

$\therefore\ m^2 + n^3 = 3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17$

Clave B

30.

Sea n: cantidad de socios.
$G_1, G_2; ...; G_n$: ganancia de los socios

Del enunciado:

$\frac{G_1}{1 \times 3} = \frac{G_2}{4 \times 8} = \frac{G_3}{18 \times 30} = \frac{G_4}{96 \times 144}$

$= \frac{G_5}{600 \times 840} = ... = \frac{G_n}{?}$

$\frac{G_1}{(2-1)(2+1)} = \frac{G_2}{(6-2)(6+2)} = \frac{G_3}{(24-6)(24+6)} =$

$\frac{G_4}{(120-24)(120+24)} = \frac{G_5}{(720-120)(720+120)}$

Luego:

$\frac{G_1}{2!^2 - 1} = \frac{G_2}{3!^2 - 2!^2} = \frac{G_3}{4!^2 - 3!^2} =$

$\frac{G_4}{5!^2 - 4!^2} = ... = \frac{G_n}{(n+1)!^2 - n!^2} = \qquad ...(1)$

Por dato:

$\frac{\overline{NILB(I-3)ZA(N-1)MP}}{(n+1)!^2 - 1} = 720$

$q(q+1)(q+2) = \underbrace{720}_{(n+1)!}((n+1)!+1)((n+1)!-1)$

$\Rightarrow (n+1)! = 720 = 6!$

$\therefore\ n = 5$

Clave C

REGLA DE TRES

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 57) Unidad 3

1. n.° caballos IP Días

18 —— 15
27 —— x

$x = \frac{18 . 15}{27}$

$\therefore x = 10$ días

Clave D

2. Sabemos:

pintores DP área
x — $\pi . 5^2$
(x + 48) — $\pi . 7^2$

$\frac{(x+48)}{x} = \frac{49\pi}{25\pi}$

$25(x + 48) = 49x$
$25x + 1200 = 49x$
$1200 = 24x$
$\therefore x = 50$

Clave D

3. obreros IP horas

12 ⟷ 8
15 ⟷ x

$\Rightarrow x = \frac{12 \times 8}{15} = 6{,}4$ h

Clave C

4.

$\frac{\pi . (2)^2}{3} = \frac{\pi(4)^2}{x}$

$x = \frac{3 . 4^2}{2^2}$

$x = 12$

Tardaría 12 horas.

Clave B

5.

superficie DP precio
$4\pi(20)^2$ — 64 000
$4\pi(25)^2$ — x

$4\pi . (20)^2 . x = 4\pi(25)^2 . 64\,000$
$x = (25)^2 . 160$
$\therefore x = S/.100\,000$

Clave C

6. área DP tiempo
$6a^2$ — 40 min
$6(3a)^2$ — x

$\frac{6a^2}{6.9a^2} = \frac{40}{x}$

$\frac{1}{9} = \frac{40}{x}$

$\Rightarrow x = 360$ min
$\therefore x = 360$ min $= 6$ h

Si empezó a las 9 : 40 a.m. terminará a las 3: 40 p.m.

Clave E

7. Obreros Días Obra
8 12 2/3
2 x 1/3
IP DP

$\frac{2 . x . 2}{3} = \frac{12 . 8 . 1}{3}$

$x = 24$

Demorarán 24 días.

Clave C

8.

Efic.	n.° obra	n.° días	h/d	obra
10	33	12	6	A m
15	40	11	10	B m

$10 . 33 . 12 . 6 . B = 15 . 40 . 11 . 10 . A$

$9B = 25A \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{9}{25}$

Clave D

9. $\frac{8 . 8 . 3}{48 . 2} = \frac{10 . x . 4}{40 . 1{,}5}$

$\therefore x = 3$ días

Clave D

10. Si por cada litro debe haber 20 g de sal en 250 g de sal; ¿Cuántos litros habrá?

cantidad de agua (DP) cantidad de sal
1 — 20 g
x — 250 g

$\frac{1}{x} = \frac{20}{250}$
$250 = 20x$
$\Rightarrow x = 12{,}5$ L

Como ya se tienen 8 litros, luego aumentará:
$12{,}5 - 8 = 4{,}5$ L

Clave E

11. Sea la obra:

Total: $47 \rightarrow 100 = 4700$
Falta: $(47 - 5) \rightarrow 100 = 4200$

Entonces:

Obreros Días Obra
24 ⟷ 47 — 4700
$(18 + 6 \times 50\%)$ x — 4200

Hallamos x
$24 \times 47 \times 4200 = (18 + 3) \times x \times 4700$
$x = 48$
$\therefore (48 + 5) - 47 = 6$ días

Clave D

12. En este problema aplicaremos lo siguiente:

Suma de partes = total.
Luego:
$4 . 10 . 6 + 3 . 12 . 24 + 1 . 8 (24 - x) = 4 . 10 . 30$
Dividiendo entre 8 a cada miembro:
$30 + 108 + 24 - x = 150$
$x = 12$

4 máq. 10 h/d — 30 días
6 días | 24 días
4 máq. 10 h/d; 3 máq. 12 h/d; x días; (24 – x)días Se repara la máquina 1 máq. 8 h/d

Clave B

13. Sean:

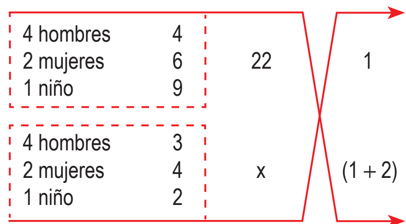
x: n.° de obreros adicionales
m: n.° de h/d adicionales
Aplicamos:
Suma de partes = total
Luego:
$15 . 8 . 5 + (15 + x)(8 + m) . 15 = 15 . 8 . 25$
$40 + (15 + x)(8 + m) = 200$
$(15 + x)(8 + m) = 160$
mín. 1 2
5 0

$\Rightarrow x = 1$

Clave C

14. Sean:

Eficiencia de un hombre: A
Eficiencia de una mujer: B
Eficiencia de un niño: C
Del enunciado:
$A = 2B \wedge B = 2C \Rightarrow A = 4C$
Luego:
n.° personas n.° h/d n.° días dificultad



	n.° h/d	n.° días	dificultad
4 hombres / 2 mujeres / 1 niño	4 / 6 / 9	22	1
4 hombres / 2 mujeres / 1 niño	3 / 4 / 2	x	(1 + 2)

Entonces:
$[4(4C)4 + 2(2C)6 + 1(C)9]22 . 3 = [4(4C)3 + 2(2C)4 + 1(C)2] . x . 1$
$(64C + 24C + 9C) . 66 = 848C + 16C + 2C)x$
$97 . C . 66 = 66x$
$\Rightarrow x = 97$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 59) Unidad 3

Comunicación matemática

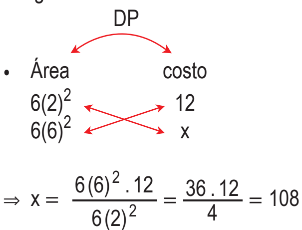
1. Las magnitudes costo y área son DP

Luego:

- Área DP costo
$6(2)^2$ — 12
$6(6)^2$ — x

$\Rightarrow x = \frac{6(6)^2 . 12}{6(2)^2} = \frac{36 . 12}{4} = 108$

- Área DP costo
$6(2)^2$ — 12
$6(4)^2$ — y

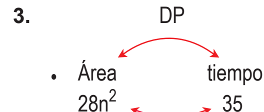


$y = \frac{6(4)^2 . 12}{6(2)^2} = \frac{16 . 12}{4} = 48$

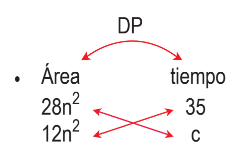
$\therefore$ Nos piden: $x + y = 108 + 48 = 156$

2.

3.



Luego: $b = \dfrac{32n^2 . 35}{28n^2} \Rightarrow b = 40$



Luego: $c = \dfrac{12n^2 . 35}{28n^2} \Rightarrow c = 15$

$\therefore\ b + c = 40 + 15 = 55$

Clave B

Razonamiento y demostración

4. I. $F \Rightarrow a_1 . b_2 = b_2b_1$

II. $V \Rightarrow a_1c_1 = a_2c_2$

III. $F \Rightarrow a_1 . b_2 . c_1 = a_2 . b_1 . c_2$

5. I. V

Del enunciado se tiene:

n.° monos	n.° minutos	n.° plátanos
20	20	20
10	10	5

Luego:

$\underbrace{20 . 20 . 5}_{2000} = \underbrace{10 . 10 . 20}_{2000}$

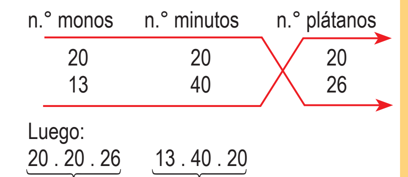
II. F

n.° monos	n.° minutos	n.° plátanos
20	20	20
10	90	50

Luego:

$\underbrace{20 . 20 . 50}_{20\,000} = \underbrace{10 . 90 . 20}_{18\,000}$

III. V



n.° monos	n.° minutos	n.° plátanos
20	20	20
13	40	26

Luego:

$\underbrace{20 . 20 . 26}_{10\,400} = \underbrace{13 . 40 . 20}_{10\,400}$

Clave B

Resolución de problemas

6. n.° ob. (IP) n.° días

n.° ob.	n.° días
12	160
4	x

$\Rightarrow 12 . 160 = 4 . x$

$\therefore x = 480$

Clave A

7. n.° caballos (IP) días (ración)

n.° caballos	días (ración)
6	15
9	x

$9 . x = 6 . 15 \Rightarrow x = 10$ días

Clave B

8.

Leones	Días	Carne (kg)
5	30	720
8	25	x

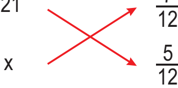
$5 . 30 . x = 8 . 25 . 720$

$x = 960$

Se necesitaron 960 kg.

Clave A

9. Días (DP) Obra



Días	Obra
21	$\frac{7}{12}$
x	$\frac{5}{12}$

$\Rightarrow 21 . \frac{5}{12} = x . \frac{7}{12}$

$7 . 3 . 5 = 7 . x$

$x = 15$

$\therefore$ Necesitará 15 días más.

Clave C

10. n.° días. h/d = k

$7 . x = 11 . y$

$\frac{x}{y} = \frac{11}{7}$

$\Rightarrow x = 11k \ \wedge\ y = 7k$

Si k = 1

x = 11 horas ∧ y = 7 horas ...(1)

Si k = 2

x = 22 horas ∧ y = 14 horas ...(2)

En la ecuación (2) los valores no cumplen, pues no pensó trabajar durante 7 días 22 horas diarias.

$\therefore$ Trabajó 7 horas diarias.

Clave E

Nivel 2 (página 60) Unidad 3

Comunicación matemática

11. Del gráfico:

Longitud de la trayectoria I: 15 km
Longitud de la trayectoria II: 24 km
Del enunciado:

n.° días	h/d	obra
15	6	15
x	8	24

$15 . 6 . 24 = x . 8 . 15$

$\Rightarrow x = 18$

Por lo tanto, demorará en recorrer 18 días.

Clave A

12. Analizando la 1.ª y 2.ª temporada:

Sea x: el número de costureras de la 2.ª temporada.

n.° costureras	n.° días	n.° vestidos
5	15	12
x	25	60

$5 . 15 . 60 = x . 25 . 12$

$\Rightarrow x = \dfrac{5 . 15 . 60}{25 . 12}$

$\Rightarrow x = 15$

Procediendo análogamente con la 1.ª y 3.ª temporada, y la 1.ª y 4.ª temporada se obtiene:

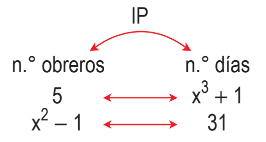
y: n.° días ∧ z: n.° vestidos
$\Rightarrow y = 35 \qquad \Rightarrow z = 32$

Nos piden: 15 + 35 + 32 = 82

Clave D

Razonamiento y demostración

13. Del enunciado, tenemos:



Luego:

$5(x^3 + 1) = (x^2 - 1)31$

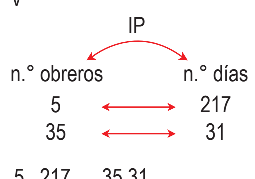
$5(x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1)(x - 1)31$

$5x^2 - 5x + 5 = 31x - 31$

$5x^2 - 36x + 36 = 0$

5x −6
x −6 $\Rightarrow x = 6$

I. V



5 . 217 35.31
1085 = 1085

II. F

n.° obreros (IP) n.° días

n.° obreros	n.° días
5	217
x	7

$5 \times 217 = x . 7$

$x = 155 > 120$

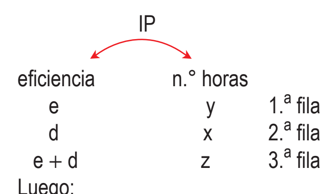
III. F

n.° obreros	n.° días
5	217

14. Sean:

Eficiencia de la empleada: e
Eficiencia de la dueña: d
Tiempo que se demorarían juntas: z

Del enunciado:



eficiencia	IP	n.° horas	
e		y	1.ª fila
d		x	2.ª fila
e + d		z	3.ª fila

Luego:
Relacionando las primeras filas (1.ª y 2.ª)

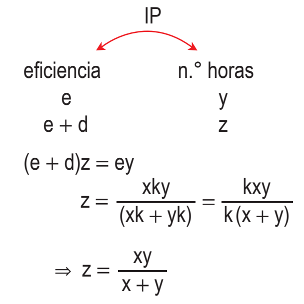
Eficiencia (IP) n.° horas

e ⟷ y

d ⟷ x

$\Rightarrow$ e = xk $\wedge$ d = yk

Entonces:



eficiencia	IP	n.° horas
e		y
e + d		z

$(e + d)z = ey$

$$z = \frac{xky}{(xk+yk)} = \frac{kxy}{k(x+y)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{xy}{x+y}$$

Como: $y < x$

$y + y < x + y$
$2y < x + y$

$$\frac{1}{2y} > \frac{1}{x+y}$$
$$\frac{xy}{2y} > \frac{xy}{x+y}$$
$$\frac{x}{2} > \frac{xy}{x+y}$$

$y < x$
$y + x < x + x$
$y + x < 2x$

$$\frac{1}{x+y} > \frac{1}{2x}$$
$$\frac{xy}{x+y} > \frac{xy}{2x}$$
$$\frac{xy}{x+y} > \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2} < \frac{xy}{x+y} < \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} < z < \frac{x}{2}$$

Resolución de problemas

15.

n.° obreros	n.° días	n.° h/d	Obra
20	8	5	20
30	x	7	28

IP — IP — DP

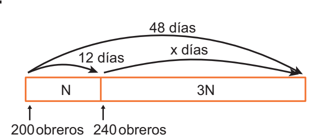
$$\Rightarrow \frac{20 . 8 . 5}{20} = \frac{30 . x . 7}{28}$$

$\Rightarrow 15x = 80 \Rightarrow 3x = 16$

$$\therefore x = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Clave C

16.



$$\frac{200 . 48}{4N} = \frac{240 . x}{3N}$$

$\Rightarrow x = 30$

$\therefore$ Piden: $48 - (x + 12) = 48 - 42 = 6$

Clave C

17.

Obreros	Días	h/d
20	30	8

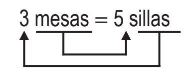
12 días | 12 días, x obreros, 10 h/d

$20 . 30 . 8 = 12 . 20 . 8 + 12 . x . 10$
$120x = 2880$
$x = 24$

Se aumentaron: $24 - 20 = 4$ obreros

Clave A

18. 90 mesas = 150 sillas



$\Rightarrow$ mesas = 5k $\wedge$ sillas = 3k

Carpinteros (IP)	Días (IP)	Obra
30	6	90 . 5k
20	15	120 . 5k + x . 3k

$30 . 6\,(120 . 5k + x . 3k) = 20 . 15 . 90 . 5k$
$120 . 5 + 3x = 750$
$600 + 3x = 750 \Rightarrow 3x = 150$
$\therefore x = 50$

Clave A

19.

18 obreros	15 obreros
24 días	x
8 h/d	(8 + 1) h/d
60% eficiencia	48% eficiencia

$18 . 24 . 8 . 60\% = 15 . x . 9 . 48\%$
$\therefore x = 32$ días

Clave A

20. La máquina M_1 se malogra, entonces:

En 30 h — P(producción)
En 18 h — x

Es una regla de tres simple directa:
$30x = 18P \Rightarrow x = \frac{3}{5}P$

En 18 horas M_1 ha hecho $\frac{3}{5}$ de la producción, el resto ($\frac{2}{5}$ P) la hará M_2.

La máquina M_2:

En 35 h — P
En y h — $\frac{2}{5}$ P

Es una regla de tres simple directa:

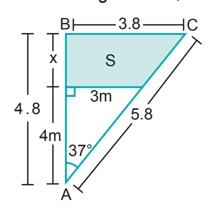
$\Rightarrow y . P = 35 . \frac{2}{5} P$
$y = 14$ h

Clave B

Nivel 3 (página 60) Unidad 3

Comunicación Matemática

21. En el triángulo ABC, se tiene:



$\Rightarrow x = 32 - 4m$

Además:

- $S = \left(\frac{24 + 3m}{2}\right)x$

$S = \frac{3(8+m)}{2} . 4(8 - m)$

$S = 6(64 - m^2)$

- $A_{ABC} = \frac{32 . 24}{2} = 384$

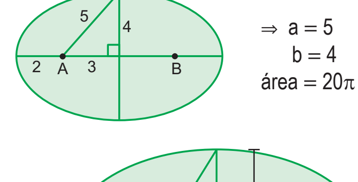
Del enunciado:

Obreros	n.° días	h/d	obra
8	10	8	384
6	5	5	$6(64 - m^2)$

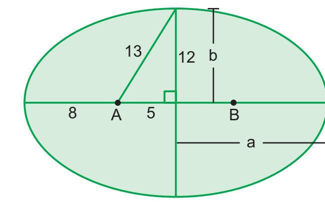
Luego:
$8 . 10 . 8 . 6 . (64 - m^2) = 6 . 5 . 5 . 384$
$10(64 - m^2) = 25 . 6$
$64 - m^2 = 15$
$m^2 = 49$
$\Rightarrow m = 7$
$\therefore x = 32 - 4(7) = 32 - 28$
$x = 4$

Clave D

22. Del enunciado se deduce que el área de hierba que come la vaca corresponde a una elipse.

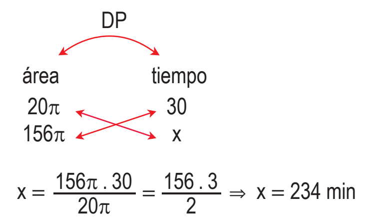


$\Rightarrow a = 5$
$b = 4$
área $= 20\pi$



$a = 13$
$b = 12$
área $= 156\pi$

Del enunciado:



$x = \dfrac{156\pi \cdot 30}{20\pi} = \dfrac{156 \cdot 3}{2} \Rightarrow x = 234$ min

Clave D

Razonamiento y demostración

23. Analizando el número de máquinas en cada caso, se tiene:

$\overline{n4}_{(m)} \Rightarrow n < m$ ... (1)

$\overline{12p}_{(n)} \Rightarrow p < n$ ... (2)

$\overline{1nm}_{(6)} \Rightarrow n < 6 \wedge m < 6$ ... (3)

$\overline{210}_{(p)} \Rightarrow 2 < p$ ... (4)

De (1), (2), (3) y (4) se obtiene:

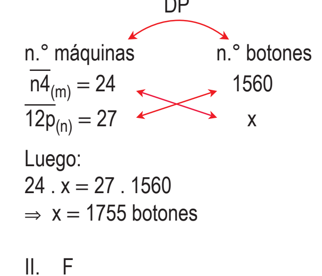
$2 < p < n < m < 6$

$p \to 3,\ n \to 4,\ m \to 5$

Luego:

I. V

$\overline{(a-1)(3a+1)55} = 1755$



Luego:

$24 \cdot x = 27 \cdot 1560$

$\Rightarrow x = 1755$ botones

II. F

n.° máquinas	n.° botones
24	1560
$\overline{1nm}_{(6)} = 65$	y

Luego: $24y = 65 \cdot 1560$

$\Rightarrow y = 4225 \neq 4215$

III. F

n.° máquinas	n.° días	n.° botones
24	1	1560
$\overline{210}_{(p)} = 21$	3	z

Luego: $24 \cdot 1 \cdot z = 21 \cdot 3 \cdot 1560$

$\Rightarrow z = 4095 < 4100$ botones

24. Como: $\text{MCD}(\overline{1c1b};\ \overline{ab5a}) = 156 \to \overset{\circ}{4},\ \overset{\circ}{3},\ \overset{\circ}{13}$

Luego:

- $\underset{-\ \ +}{\overset{1\,4\,3\,1}{\overline{a\,b\,5\,a}}} = \overset{\circ}{13}$ $\Rightarrow a - 15 - 4b - a = \overset{\circ}{13}$

  $15 + 4b = \overset{\circ}{13}$

  $2 + 4b = \overset{\circ}{13}$

  $1 + 2b = \overset{\circ}{13}$

  $\Rightarrow b = 6$

- $\overline{ab5a} = \overset{\circ}{3}$

  $\overline{a65a} = \overset{\circ}{3} \Rightarrow a + 6 + 5 + a = \overset{\circ}{3} \wedge 5a = \overset{\circ}{4}$

  $2a + 11 = \overset{\circ}{3}$ $\downarrow$

  $2a + 2 = \overset{\circ}{3}$ $\quad 2$

  $a + 1 = \overset{\circ}{3}$ $\quad 6$

  $\downarrow$

  2

  5

  $8 \Rightarrow a = 2$

- $\overline{1c1b} = \overset{\circ}{3}$

  $\overline{1c16} = \overset{\circ}{3} \Rightarrow 1 + c + 1 + 6 = \overset{\circ}{3}$

  $c + 2 = \overset{\circ}{3}$ ...(1)

  $\downarrow$

  1

  4

  7

  $\underset{-\ \ +}{\overset{1\,4\,3\,1}{\overline{1\,c\,1\,b}}} = \overset{\circ}{13}$ $\Rightarrow 6 - 3 - 4c - 1 = \overset{\circ}{13}$

  $2 - 4c = \overset{\circ}{13}$

  $1 - 2c = \overset{\circ}{13}$

  $2c - 1 = \overset{\circ}{13}$ ...(2)

  $\downarrow$

  7

De (1) y (2): $c = 7$

Del enunciado:

n.° leñadores	n.° días	n.° árboles
1716	17	$\overline{mnpq}$
2652	77	$\overline{1pqqq}$

$1716 \cdot 17 \cdot \overline{1pqqq} = 2652 \cdot 77 \cdot \overline{mnpq}$

$156 \cdot 11 \cdot 17 \cdot \overline{1pqqq} = 156 \cdot 17 \cdot 77 \cdot \overline{mnpq}$

$\overline{1pqqq} = 7 \cdot \overline{mnpq}$

$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \qquad \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$

$6555 \qquad 2365$

I. V

Sea: x el n.° de árboles que pueden talar

n.° leñadores	n.° días	n.° árboles
1716	17	2365
6171	52	x

Luego: $1716 \cdot 17 \cdot x = 6171 \cdot 52 \cdot 2365$

$\Rightarrow x = 26\,015$

II. F

$\text{CA}(\overline{ab}) \qquad \overline{pq}$

$\text{CA}(26) \qquad 65$

$74 \quad > \quad 65$

III. F

$\overline{qa} + \overline{pc} = 52 + 67 = 119$

Resolución de problemas

25. Sea x el n.° de litros de agua que se deben agregar.

Al agregar agua pura varía la proporción, pero no varía el n.° de libras de sal.

Sabemos:

Vmezcla	DP	n.° libras de sal
10	——	1/5
80 + x	——	2

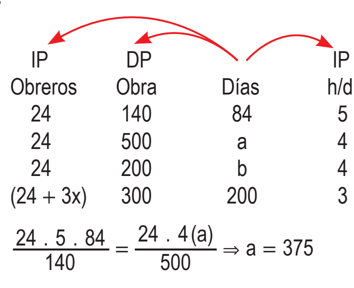
$$\frac{10}{80+x}=\frac{1/5}{2}$$

$$20 = 16 + \frac{x}{5}$$

$$\therefore\ x = 20\ \text{L}$$

Clave B

26.



IP	DP		IP
Obreros	Obra	Días	h/d
24	140	84	5
24	500	a	4
24	200	b	4
(24 + 3x)	300	200	3

$$\frac{24\ .\ 5\ .\ 84}{140}=\frac{24\ .\ 4(a)}{500}\Rightarrow a = 375$$

$$\frac{24\ .\ 5\ .\ 84}{140}=\frac{24\ .\ 4\ .\ b}{200}\Rightarrow b = 150$$

$$\frac{84\ .\ 5\ .\ 24}{140}=\frac{200\ .\ 3\ .\ (24+3x)}{300}$$

$$24 + 3x = 36$$

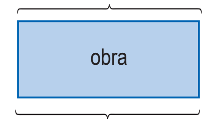
$$\therefore\ x = 4$$

Clave C

27. Del enunciado tenemos:

2 obreros < ef: 4, ef: 7

x días



$\overline{(a-4)(a-4)}$ días

$\overline{(a-2)1}$ obreros

ef: 2

Luego:

$$(1\ .\ 4 + 1\ .\ 7)x = \overline{(a-2)1}\ .\ 2\ .\ \overline{(a-4)(a-4)}$$

$\downarrow$ 5

$$11x = 31\ .\ 2\ .\ 11$$

$$\Rightarrow\ x = 62$$

Clave D

28. Como el pasto crece regularmente todo el tiempo:

n.° $acres_{final}$ = n.° $acres_{inicial}$ + v . t

Donde v es la velocidad de crecimiento y t el tiempo.

En el problema:

$$\frac{12\ .16}{10 + v\ .16}=\frac{18\ .8}{10+v\ .8}$$

$$4(8v + 10) = 3(16v + 10)$$

$$32v + 40 = 48v + 30$$

$$10 = 16v$$

$$\Rightarrow v = 0{,}625$$

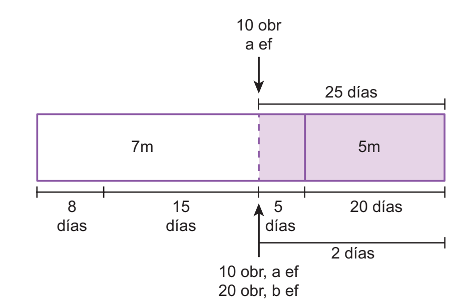
$$\frac{x\ .6}{40 + 0{,}625\ .6}=\frac{12\ .16}{10 + 0{,}625\ .16}$$

$$\Rightarrow \frac{6x}{43{,}75}=\frac{192}{20}$$

$$\therefore\ x = 70$$

Clave E

29. Si los 10 obreros realizan 7m de obra en 28 días, entonces 5m lo realizarán en 20 días.



Del gráfico, en la parte sombreada se cumple:

$$10\ .\ a\ .\ 25 = (10\ .\ a + 20\ .\ b)2$$

$$125a = 10a + 20b$$

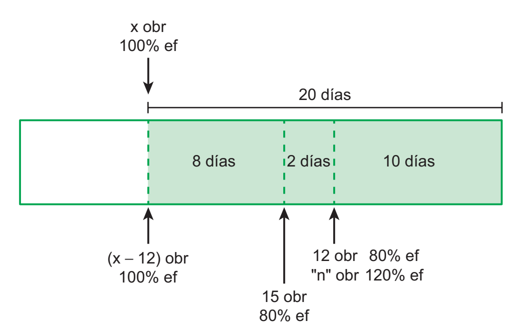
$$115a = 20b$$

$$23a = 4b$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{4}{23}$$

Clave B

30. Del enunciado se tiene:



Del gráfico:

Suma partes = Total

Luego:

$$(x - 12)\ 100\%\ .\ 20 + 15.80\%\ .\ 2 + 12.80\%10 + n\ .\ 120\%\ .\ 10 = x\ .\ 100\%\ .\ 20$$

$$(x - 12)20 + 24 + 96 + 12n = 20x$$

$$20x - 240 + 120 + 12n = 20x$$

$$12n = 120$$

$$\Rightarrow n = 10$$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 64) Unidad 3

Comunicación Matemática

1.
- $40\%(35) = \frac{40}{100}(35) = 14$
- $28\%(75) = \frac{28}{100}(75) = 21$
- $53\%15 + 27\%15 = 80\%15 = 12$
- $8(75\%3) = 600\%3 = 18$

2.

3.
- 25% de $32 \Rightarrow \frac{25}{100}(32) = 8$
- 30% de $30 \Rightarrow \frac{30}{100}(30) = 9$
- $7 = x\%175$
  $1 = \frac{x}{100} \cdot 25 \Rightarrow x = 4$
- $50\%x = 1 \Rightarrow \frac{50}{100}x = 1 \Rightarrow x = 2$
- $3 = 25\%x \Rightarrow 3 = \frac{25}{100}x \Rightarrow x = 12$
- $47\%125 - 15\%125 = (47 - 15)\%125$
  $= 32\%125 = \frac{32}{100} \cdot 125$
  $= 40$

Por lo tanto, la palabra oculta es HUÁSCAR.

Razonamiento y demostración

4.
- $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$ (V)
- $24\%75 = \frac{24 \times 75}{100} = 18$ (V)
- $(15\%)(16\%)(10) \quad (15 \times 16)\%10$ (F)
  $\frac{15}{100} \cdot \frac{16}{100} \cdot 10 \quad \frac{15 \times 16}{100} \cdot 10$
  $\frac{2400}{100 \cdot 100} \quad \frac{2400}{100}$
  $0{,}24 \neq 24$
- $Du = \left(20 + 20 - \frac{20 \cdot 20}{100}\right)\%$ (F)
  $= 36\%$

5. $A = 13\%17 + 36\%33 + 23\%17$

$A = \underbrace{13\%17 + 23\%17}_{36\%\,17} + 36\%33$

$A = 36\%50 \Rightarrow A = 18$

$B = 7\%27 + 20\%13 + 13\%27$

$B = \underbrace{7\%27 + 13\%27}_{20\%27} + 20\%13$

$B = 20\%40 \Rightarrow B = 8$

I. V
$A > B$
$\downarrow \quad \downarrow$
$18 \quad\quad 8$

II. V $\Rightarrow A = 18 \wedge B = 8$

III. F
$(A - B)\%B = (18 - 8)\%8 = 10\%8$
$= 4/5$

Clave E

Resolución de problemas

6. $\frac{15}{100}(600) + \frac{36}{100}(400)$

$90 + 144 = 234$

Clave A

7. Sea una cantidad base de a.

Luego: queda: $80\% \cdot 60\% \cdot 75\%(a) = 36\%a$

El descuento equivalente será:
$a - 36\%a = 64\%a$
Por lo tanto, equivale a uno del 64%.

Clave D

8.

$\frac{3}{100} \cdot x = 15$

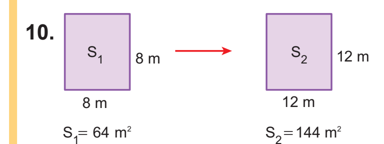
$x = \frac{15 \cdot 100}{3} = 500$

Clave E

9. $\frac{25}{100} \cdot 840 + \frac{2{,}5}{100} \cdot 4000 = 210 + 100 = 310$

Clave E

10.



$S_1 = 64\ m^2$ $\quad S_2 = 144\ m^2$

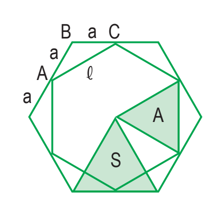
$\therefore$ Variación porcentual $= \left(\frac{144 - 64}{64}\right) \cdot 100\%$
$= 125\%$

Clave A

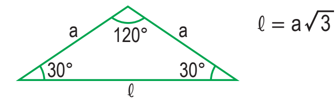
Nivel 2 (página 64) Unidad 3

Comunicación matemática

11.



En el $\triangle ABC$ se tiene:



$\ell = a\sqrt{3}$

Nos piden:

$\left(\frac{6A}{6S}\right)100\% = \frac{\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)}{\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}} \times 100\% = \frac{\ell^2}{4a^2} \times 100\%$

$= \frac{(a\sqrt{3})^2}{4a^2} \cdot 100\% = 75\%$

Clave A

12.
- $40\%(125) = 50$
  $h = 125 - 50 \Rightarrow h = 75$ m
- Por conservación de la energía mecánica:
  $\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$
  $\frac{15^2}{2} + 10(125) = \frac{1}{2}(v_B)^2 + 10(75)$
  $\frac{225}{2} + 1250 = \frac{v_B^2}{2} + 750$
  $1225 = v_B^2 \Rightarrow v_B = 35$ m/s
  Aumenta $= \left(\frac{35 - 15}{15}\right)100\% = 133{,}\hat{3}\,\%$
- Disminuye $= \left(\frac{mgh_A - mgh_B}{mgh_A}\right)100\%$
  $= \left(\frac{h_A - h_B}{h_A}\right)100\% = \left(\frac{125 - 75}{125}\right)100\% = 40\%$

Razonamiento y demostración

13. I. F

Aumento único $= \left(20 + 30 + \frac{20 \cdot 30}{100}\right)\%$
$= 56\%$

$P_V = P_C + 56\%P_C = 156\%800$
$\Rightarrow P_V = S/.1248$

II. F
$P_V = P_C +$ ganancia
$P_V = P_C + 27\%P_V + 46\%P_C$
$73\%P_V = 146\%P_C$
$P_V = 2P_C = 2(800) \Rightarrow P_V = S/.1600$

III. F
$P_V = P_C + 30\%P_C = P_F - 20\%P_F$
$130\%P_C = 80\%P_F$
$130 \cdot 800 = 80P_F$
$\Rightarrow P_F = S/.1300$

Clave B

14. Sea la cantidad N.

$N = 100\%\ N$

a) $\underbrace{N - d_1\%\ N}_{1.^{er}\text{ descuento}} = \underbrace{(100 - d_1)\%\ N}_{\text{nueva cantidad}} = M$

$\underbrace{M - d_2\%\ M}_{2.^{\circ}\text{ descuento}} = (100 - d_2)\%\ M$

$2.^{\circ}$ descuento $= \underbrace{(100 - d_2)\%\,(100 - d_1)\%N}_{\text{Nueva cantidad}}$ ... (1)

Equivale a un único descuento: x%

Luego:
$N - x\%N = (100 - x)\%\ N$ ... (2)

Entonces: (1) = (2)
$(100 - x)\%N = (100 - d_2)\%\ (100 - d_1)\%N$

$(100 - x)\% = \left(\frac{10\,000 - 100d_1 - 100d_2 + d_1d_2}{100}\right)\%$

$100\% - x\% = \left(100 - d_1 - d_2 + \frac{d_1 \cdot d_2}{100}\right)\%$

$1 - x\% = 100\% - \left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 \cdot d_2}{100}\right)\%$

$\Rightarrow x\% = \left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 \cdot d_2}{100}\right)\%$

b) Análogo a la demostración a.

Resolución de problemas

15. x: precio original

Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
x	90%x	81%x	72,9%x
↓ –10%x	↓ –10%x	↓ –10%x	↓ –10%x
90%x	81%x	72,9%x	65,61%x

Por dato:
65,61%x = 131 220
$\therefore$ x = S/.200 000

Clave C

16. 96%P = P(100 + n)%[100 – (100 – n)]%
Resolviendo:
96%P = n%(100 + n)%P
$\Rightarrow$ 9600 = n(n + 100)
$\therefore$ n = 60

Clave E

17. Pc = 441, Pv = 441 + 12,5% Pv
Pv = 504

Descuento único = 100% – 80% . 75% . 60%

$\Rightarrow$ El descuento único es 64%.
Pf = Pv + D
Pf = 504 + 64%Pf $\Rightarrow$ Pf = S/. 1400

Clave C

18. $P_{v_1} = P_{c_1} + 20\%P_{c_1}$
$P_{v_1} = 120\%P_{c_1}$
$P_{v_2} = P_{c_2} - 20\%P_{c_2}$
$P_{v_2} = 80\%P_{c_2}$
Dato: $P_{v_1} = P_{v_2}$
$120\%P_{c_1} = 80\%P_{c_2}$
$\frac{P_{c1}}{P_{c_2}} = \frac{2}{3}$

Entonces:
$P_{c_T} = 5k \;\wedge\; P_{v_T} = 4{,}8k$
$P_{v_T} < P_{c_T}$, la pérdida será:

$\frac{(5k - 4{,}8k)}{5k} \times 100\% = 4\%$

Clave B

19. Sea k el precio de una camisa.
Sea n el n.° de camisas que podría comprar.
Del enunciado:
Descuento único = 100% – 80% . 75% = 40%
Luego:
k.n = (100 – 40)% k . (n + 6)
k.n = 60%k(n + 6)
n = $\frac{3}{5}$ (n + 6) $\Rightarrow$ n = 9

Si solo hiciera un descuento del 10% se tendría:

k . n = 90% k . x
9 = 90%x
$\Rightarrow$ x = 10 camisas

Clave A

20. Dato: $\frac{A}{A_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{100}{56{,}25}$

$\Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{4}{3}$

Ahora:
$\frac{V}{V_1} = \frac{r^3}{r_1^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$

$\frac{V}{V_1} = \frac{64}{27}$

$\Rightarrow \frac{V - V_1}{V} = \frac{64 - 27}{64} \times 100\%$

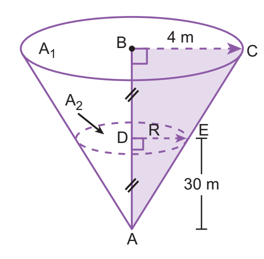
$= 57{,}8125\%$

Clave D

Nivel 3 (página 65) Unidad 3

Comunicación matemática

21. Del gráfico:



Se observa:
$\Delta ABC \sim \Delta ADE$
Luego:
$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$

$\frac{4}{60} = \frac{R}{30} \Rightarrow R = m^2$

Entonces:
$A_1 = \pi(4)^2 = 16\pi\ m^2$
$A_2 = \pi(2)^2 = 4\pi\ m^2$

$V_1 = \frac{\pi(4)^2 \times 60}{3} = 320\pi\ m^3$

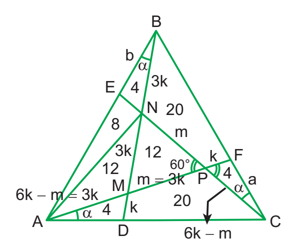
$V_2 = \frac{\pi(2)^2 \times 30}{3} = 40\pi\ m^3$

Porcentaje varía el área $= \left(\frac{16\pi - 4\pi}{16\pi}\right)100\% = 75\%$

Porcentaje varía el volumen $= \left(\frac{320\pi - 40\pi}{320\pi}\right)100\% = 87{,}5\%$

Clave A

22. Resumen:



Como: $A_{\Delta AFC} = A_{\Delta EBC}$
$\frac{b \,.\, BC.sen60°}{2} = \frac{a \,.\, AC.sen60°}{2} \Rightarrow b = a$

Entonces: $\Delta ACF \cong \Delta CBE \cong BAD$
$\Rightarrow m\angle MAD = m\angle PCF = m\angle EBN$
$\Rightarrow \Delta MNP$ es equilátero.

Por propiedad (semejanza) en ΔAFC:
$a^2 = k \,.\, 7k \Rightarrow a = k\sqrt{7}$
Por ley de cosenos en el ΔPFC:
$a^2 = k^2 + (6k - m)^2 - 2k\,(6k - m)\cos 60°$
$0 = 24k^2 - 11km + m^2$
8k – m
3k – m
(8k – m)(3k – m) = $\Rightarrow$ m = 8k (X) v m = 3k(✓)

Piden:
$\left(\frac{12}{4 + 20 + 4 + 20 + 4 + 20}\right)100\% = 16{,}\widehat{6}\%$

Clave D

Razonamiento y demostración

23. Del enunciado:
$\overline{aa}_{(2)} \Rightarrow a = 1$
$\overline{cca}_{(3)} \Rightarrow c = 2$
$\overline{cb0}_{(d)} \Rightarrow b < d < 5$ (dato); b = 3, d = 4

Toman: $\overline{cb0}_{(d)}\% = 230_{(4)}\% = 44\%$

Fuman: $\overline{caa}_{(4)}\% = 211_{(4)}\% = 37\%$

No toman ni fuman:
$\overline{aa}_{(2)} \times 10^2 = 11_{(2)} \times 100 = 300$

Toman y fuman:
$\overline{cca}_{(3)}\% = 221_{(3)}\% = 25\%$

Sea T el total de asistentes, entonces:

	Toman (44%)	No toman
No fuman	33%T	300
Fuman (37%)	11%T	26%T

33%T + 11%T + 26%T + 300 = 100%T
70%T + 300 = 100%T
300 = 30%T
$\Rightarrow$ T = 1000
Luego el cuadro queda así:

	Toman	No toman
No fuman	330	300
Fuman (37%)	110	260

Entonces:
Fuman, pero no toman 260. ... (F)
No fuman, pero toman 330. ... (V)
Los que fuman son 370. ... (V)
La cantidad de personas que no toman es 560 $\neq \overset{\circ}{3}$. ... (F)

24.

I. V

$\overline{mn} = 10 \wedge \overline{bc} = \overset{\circ}{6}$

$\overline{bc} = 96$

Luego:

$a = 10\%(96)$

$a = 9,6 > 9,5$

II. V

Primos

m	+ n	=
2	3	5
2	5	7
3	2	5
5	2	7

Además:

$26 < \overline{mn} < \overline{bc} < 53$

$\Rightarrow \overline{mn} = 32$

Primos

b	– c	=
7	5	2
7	2	5
5	3	2
5	2	3

Además:

$32 < \overline{bc} < 53$

$\Rightarrow \overline{bc} = 52$

Entonces:

$a = 32\%(52) = 16,64 > 15$

III. F

$\overline{bm} = 5 \cdot \overline{cn}$ como CD $(\overline{mc}) = 4$

b: 0, 5; c: 1; $\overline{mc}$: 51

Ya que $51 = 3^1 \times 17^1$

$CD(51) = 2 \times 2 = 4$

Luego:

$\overline{bm} = 5 \cdot \overline{cn}$

$\overline{b5} = 5 \cdot \overline{1n}$

$10b + 5 = 5(10 + n)$

$2b + 1 = 10 + n$

$2b = 9 + n$ además: $b - n = 2$

b	n	
5	1	✗
6	3	✗
7	5	✓
8	7	✗
9	9	✗

Entonces:

$a = 55\%\ 71 = 39,05$

Luego:

$80\%a = 80\%(39,05) = 31,24$

Clave E

Resolución de problemas

25. Máq. 1 Máq. 2

1859 3146

$\underbrace{88\%13a}_{572a}$ $\underbrace{117\%220a}_{1287a}$

$\dfrac{88\%.13a}{117\%.13a} \Rightarrow 13n = 5005$

$n = 385$

$\therefore 9n - 4n = 5n = 1925$

Clave D

26. L_1: $100k + 2k \rightarrow 102k$

L_2: $100k + 4k \rightarrow 104k$

L_3: $100k + 6k \rightarrow 106k$

L_4: $100k + 8k \rightarrow 108k$

L_5: $100k + x$

$P_{V(total)} = 109\%P_{C(total)}$

$(520k + x) = 109\%(500k)$

$x = 25k$

Piden:

$G = m\%P_v$

$25k = m\%(125k)$

$\therefore m\% = 20\%$

Clave B

27. $P_F = 130\%P_C$ ... (1)

$\underbrace{G_B}_{6N} = \underbrace{G_N}_{N} + \underbrace{gasto}_{5N} \Rightarrow$ Desc. = 9N

$P_V = P_C + G_B = 280$ ...(2)

$P_F = \underbrace{Pv}_{P_C + G_B} + 9N$

$30\%P_C = 15N$

$P_C = 50N$ ... (3)

Reemplazando (3) en (2):

$50N + 6N = 280$

$56N = 280$

$N = 5 \Rightarrow P_C = 250$

Reemplazando en (1):

$\therefore P_F = 130\%(250) = 325$

Clave E

28. n.° ingenieros : 140n

n.° médicos : 60n

	Menor a 25	Entre 25 y 30	Mayor o igual a 30
Ing.	28n	x = 84n	y= 28n
Médico P =	$\frac{7n}{35n}$	46n	7n

Del enunciado:

- $20\%(28n + P) = P$

$28n + P = 5P \Rightarrow P = 7n$

- $25\%(x + y) = y$

$x + y = 4y \Rightarrow x = 3y$

Además:

$28n + x + y = 140n$

$x + y = 112n$

$4y = 112n$

$\Rightarrow y = 28n \wedge x = 84n$

Nos piden:

$\dfrac{y}{y + 7n} = \dfrac{28n}{35n} = 80\%$

Clave C

29. D: 5% 20% 25%

5%	20%	25%
a	b	a + b
4a	4b	4(a + b)
4a < 40	40 < 4b ≤ 90	90 < 4(a + b)
a ≤ 10	$10 < b \le \frac{45}{2}$	$\frac{45}{2} < a + b$

$\Rightarrow 95\%4a + 80\%\ 4b = 75\%4(a + b) + 12$

$\Rightarrow b + 4a = 60$

b = 20, a = 10

$\Rightarrow b - a = 10$

Clave C

30. 9k soles: costo total

- $G_1 = 20\% \cdot 3k = \dfrac{3k}{5}$
- $Pv = k - 25\%Pv$

$k = \dfrac{5}{4}Pv \Rightarrow 25\% \cdot \dfrac{4}{5}k = \dfrac{k}{5}$

$\dfrac{3k}{5} - \dfrac{k}{5} + 2760 = 5k$

$k = 600$

$\therefore 9k = 5400$

Clave B

MEZCLA

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 69) Unidad 3

Comunicación matemática

1.

2. $P_m = \dfrac{1.1+2.2+3.3+...+12.12}{1+2+3+...+12}$

$P_m = \dfrac{\dfrac{12.13.25}{6}}{\dfrac{12.13}{2}} = \dfrac{2.13.25}{6.13}$

$P_m = \dfrac{25}{3} \Rightarrow P_m = S/.8,\hat{3}$

Clave B

3. Del gráfico:

$23 = 4+4+3+y+2+5$

$23 = 18+y \Rightarrow y = 5$

Además:

$P_m = \dfrac{4.1,5+4.2+3.3+y.1,2+2.3+5.2,2}{4+4+3+y+2+5}$

$x = \dfrac{40+5.1,2}{18+5} = \dfrac{46}{23}$

$\Rightarrow x = 2$

Nos piden: $x+y = 2+5 = 7$

Clave A

Razonamiento y demostración

4.

5. I. F

n.° quilates $= 24(0,750) = 18$

II. V

$\dfrac{x.15+y.8}{x+y} = 12$

$15x+8y = 12x+12y$

$3x = 4y \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{3}$

III. F

IV. V

$\left.\begin{array}{l}\text{Ley}+\text{Liga}=1\\ \text{Ley}-\text{Liga}=\dfrac{1}{5}\end{array}\right\}(+)$

$2\text{Ley} = \dfrac{6}{5} \Rightarrow \text{Ley} = \dfrac{3}{5}$

Clave C

Resolución de problemas

6. Del enunciado:

$\dfrac{48(5)+32(x)}{48+32} = 6$

$240+32x = 480$

$32x = 240$

$\therefore x = S/.7,5$

Clave D

7. $\begin{array}{l}H_2O\\OH\end{array}$ $\boxed{\begin{array}{c}18\text{ L}\\12\text{ L}\end{array}}$ + $\boxed{\begin{array}{c}x\text{ L}\\H_2O\end{array}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x+30}$

$\left(\dfrac{12}{x+30}\right).100° = 15°$

$\Rightarrow 1200 = 15(x+30)$

$\therefore x = 50$

Clave C

8. Del enunciado:

$\dfrac{k(10)+4k(15)+5k(18)}{10k} = P_m$

$\Rightarrow P_m = 16$

$\therefore$ Costo $= 100(16) = S/.1600$

Clave D

9. Del enunciado:

$20 = \dfrac{18.20+24.x}{20+x}$

Luego:

$400+20x = 360+24x$

$40 = 4x$

$\therefore x = 10$ g

Clave E

10. $17 = \dfrac{20a+7b+10c}{170}$

$2890 = 20a+7b+10c$

$\Rightarrow$ Cumple para: $a = 128 \wedge b = 30 \wedge c = 12$

Puede utilizar 128 kg como máximo.

Clave D

Nivel 2 (página 69) Unidad 3

Comunicación matemática

11.

12. Sea:

d: densidad de la moneda.

Entonces:

$d = \dfrac{m_{total}}{V_{total}} = \dfrac{m_{Cu}+m_{Sñ}+m_{Zn}}{V}$

$d = \dfrac{m_{Cu}}{V}+\dfrac{m_{Sñ}}{V}+\dfrac{m_{Zn}}{V}$ ... (1)

De la tabla:

$d_{Cu} = \dfrac{m_{Cu}}{84\%V} \Rightarrow \dfrac{m_{Cu}}{V} = 8,85.84\% = 7,434$ ...(2)

$d_{Sñ} = \dfrac{m_{Sñ}}{10\%V} \Rightarrow \dfrac{m_{Sñ}}{V} = 7,29.10\% = 0,729$ ...(3)

$d_{Zn} = \dfrac{m_{Zn}}{6\%V} \Rightarrow \dfrac{m_{Zn}}{V} = 7,19.6\% = 0,4314$ ...(4)

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1):

$\Rightarrow d = 8,5944$

Clave E

Razonamiento y demostración

13. Del enunciado:

$\dfrac{3(\overline{a1})+n(\overline{a9})}{3+n} = \overline{4p}$

Como:

$\overline{a1} \le \overline{4p} \le \overline{a9} \Rightarrow a = 4$

$\dfrac{3(41)+n(49)}{3+n} = \overline{4p}$

$3+9n = 3p+np$ ... (1)

I. V

$a = 4 \Rightarrow a+3 = 7$

II. F

Si $n = 1$, reemplazando en (1):

$3+9 = 3p+p \Rightarrow p = 3$

$\Rightarrow n+p = 4$

III. V

Si $p = 5$, reemplazando en (1):

$3+9n = 15+5n$

$4n = 12 \Rightarrow n = 3$

$\Rightarrow CD(\overline{np}) = CD(35) = 4$

$\downarrow$

$5^1 \times 7^1$

IV. F

Si $n+p = 16$, reemplazando en (1):

$n = 16-p$

$3+9(16-p) = 3p+(16-p)p$

$3+144-9p = 3p+16p-p^2$

$p^2-28p+147 = 0$

$p \quad -21$

$p \quad -7$

$\Rightarrow (p = 7 \wedge n = 9) \vee (p = 21 \wedge n = -5)$

$\therefore n-p = 9-7 = 2 \neq 3$

14. Del enunciado:

$4 < a < c < 7$

$\downarrow \ \downarrow$

$5 \ \ 6$

Luego:

$\dfrac{m.24_{(5)}+n.52_{(6)}}{12} = 26_{(7)}$

$14m+32n = 12.20$

$7m+16n = 120$ ...(1)

Además:

$m+n = 12$

$m = 12-n$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1):

$7(12-n)+16n = 120$

$84-7n+16n = 120$

$9n = 36$

$\Rightarrow n = 4 \wedge m = 8$

I. F II. F III. V

Resolución de problemas

15. Del enunciado:

$\boxed{x\text{ g}} + \boxed{(3n)\text{ g}} + \boxed{(5n)\text{ g}} = \boxed{2000\text{ g}}$

14 18 20 18,2

$\dfrac{14x+18.3n+20.5n}{2000} = 18,2$

$x = 2600-11n$

Luego:

$(2600-11n)+8n = 2000$

$n = 200$

$\therefore x = 400$ g

Clave C

16. $\boxed{a} + \boxed{7b} + \boxed{4b} = \boxed{100\text{ g}}$ ... (1)

Calculamos la ley en cada lingote:

$\dfrac{170}{200} = \dfrac{17}{20}$ $\dfrac{200}{250} = \dfrac{4}{5}$ $\dfrac{300}{400} = \dfrac{3}{4}$ 0,82

Luego:

$\dfrac{17}{20}.a+\dfrac{4}{5}.7b+\dfrac{3}{4}.4b = (0,82)100$

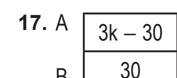
$17a+172b = 1640$ ... (2)

De (1) y (2):

$\therefore a = 56 \wedge b = 4$

Clave D

17. A, B



A	3k – 30	5k – 30	B
B	30	30	A

La relación de volúmenes tiene que ser la misma.

$\Rightarrow \dfrac{3k-30}{30} = \dfrac{30}{5k-30}$

$\dfrac{3(k-10)}{30} = \dfrac{30}{5(k-6)}$

Luego:

$(k-10)(k-6) = 60$

$k^2 - 16k + 60 = 60$

$k(k-16) = 0 \Rightarrow k = 16$

Piden: $3k + 5k$

$\therefore 3k + 5k = 8k = 8(16) = 128$ L

Clave B

18. Sean x e y los precios de las 2 clases de soya.

Del enunciado:

$P_{v1} = P_{v2}$

$120P_{m_1} = 125P_{m_2}$

Luego:

$24\left(\dfrac{3k\,.\,x + 4k\,.\,y}{3k+4k}\right) = 25\left(\dfrac{4mx+3my}{4m+3m}\right)$

$24(3x+4y) = 25(4x+3y)$

$72x + 96y = 100x + 75y$

$21y = 28x$

$\therefore \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$

Clave A

19. $\boxed{a} + \boxed{b} = \boxed{306}$

18k 21k 20k

Peso: 85%a; 85%b

$\Rightarrow 85\%a.18 + 85\%b.21 = 306.20$

$153a + 178{,}5\,b = 61\,200$

$\Rightarrow 6a + 7b = 2400$ ... (1)

Además:

$85\%a + 85\%b = 306$

$\Rightarrow a + b = 360$ ... (2)

De (1) y (2):

$a = 120 \wedge b = 240$

$\therefore a = 120$ g

Clave E

20. $\boxed{3a} + \boxed{2a} = \boxed{5a}$

0,45 0,4 x

$(0{,}45)3a + (0{,}4)2a = 5ax \Rightarrow x = 0{,}43$

Harina		Rosquillas
100 kg	→	132 kg
N	→	330

$N = \dfrac{330.100}{132} = 250$ kg

Precio = 250 . 0,43 = 107,5 soles

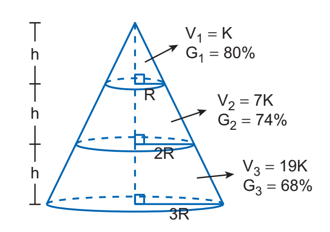
Clave D

Nivel 3 (página 70) Unidad 3

Comunicación Matemática

21.

22. En el gráfico, tenemos:



$G_m = \dfrac{K\,.\,80\% + 7K\,.\,74\% + 19K\,.\,68\%}{K + 7K + 19K}$

$G_m = \dfrac{1890\%}{27} \Rightarrow G_m = 70\%$

Clave C

Razonamiento y demostración

23. Sabemos:

n.° quilates = 24 . ley

$\overline{bb}_{(5)} = 24\,.\,0,\overline{a5c}$

$6b = \dfrac{24\,.\,\overline{a5c}}{1000}$

$250\,.\,b = \overline{a5c}$ ... (1)

I. F

De (1):

c = 0

II. V

De (1): $250\,.\,b = \overline{a5c}$ ... (2)

b		
1	250	✓
2	500	✗
3	750	✓
4	1000	✗

b + c = b impar

III. V

De (2):

Si $a + b = 10 \Rightarrow b = 3 \wedge a = 7$

$a^b = 7^3 = 343$

IV. V

Si $b = 1 \Rightarrow a = 2$; luego: $\overline{ab} = 21 = \overset{\circ}{3}$

24. Sabemos: Ley + Liga = 1

$\dfrac{\overline{n7}}{\overline{ab}} + \dfrac{\overline{4m}}{65} = 1 \in \mathbb{Z}^+$ ... (1)

$\Rightarrow \overline{ab} = 65 \Rightarrow a = 6 \wedge b = 5$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1):

$\overline{n7} + \overline{4m} = 65$

$\Rightarrow n = 1 \wedge m = 8$

I. F

MCD $(\overline{bm}; \overline{an})$ = MCD(58; 61) = 1 ≠ 8 – 6

II. V

$(a+b-m-n)^{2014} = (6+5-8-1)^{2014} = 2^{2014} = \overset{\circ}{2}$

III. V

CD $(\overline{nm})$ = CD(18) = 6 = a

↓

2×3^2

IV. V

$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \overline{pq}$

$\dfrac{6\,.\,7\,.\,13}{6} = \overline{pq}$

$\overline{pq} = 91$

$\Rightarrow p = 9 \wedge q = 1$

$\overline{qp} = 19 = \overset{\circ}{4} + 3$

Resolución de problemas

25. $\boxed{N} + \boxed{N} + \boxed{N} = \boxed{3N}$

0,8 m n x

Dato: $\dfrac{m\,.\,N + n\,.\,N}{2N} = \dfrac{18}{24} \Rightarrow m + n = 1{,}5$

$(0{,}8)N + mN + nN = 3N\,.\,x \Rightarrow x = \dfrac{23}{30}$

$\boxed{3N} + \boxed{20\text{ g}} = \boxed{3N + 20}$

Ley: $\dfrac{23}{30}$ 1 $\left(\dfrac{100-14}{100}\right)$

$3N \cdot \dfrac{23}{30} + 20 = \dfrac{86}{100}(3N + 20) \Rightarrow N = 10$ g

$\therefore 3N + 20 = 50$ g

Clave C

26. $P_m = \dfrac{150\,.\,6 + 90\,.\,8}{\left(1-\dfrac{1}{6}\right)(150+90)} = \dfrac{81}{10}$

$P_V = P_m + \dfrac{10P_m}{100} = \dfrac{11P_m}{10}$

$P_V = \dfrac{81}{10}\left(\dfrac{11}{10}\right) = 8{,}91$

Por S/.891 se entregará: $\dfrac{891}{8{,}91} = 100$ kg

Clave A

27. A B

Alcohol: $\dfrac{2}{5}\,.\,\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10}$ $\dfrac{2}{7}\,.\,\dfrac{7}{8} = \dfrac{1}{4}$

Agua: $1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10}$ $1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

$g_A = \dfrac{3}{10}\,.\,100 = 30°$

$g_B = \dfrac{1}{4}\,.\,100 = 25°$

$x\,.\,30 + 25\,.\,40 = 28(x + 40)$

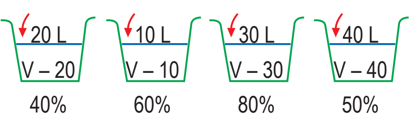
$2x = 120$

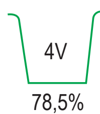
$x = 60$ L

Se deben mezclar con 60 L de A.

Clave B

28. Sea V el volumen de cada recipiente.





Se han agregado en total 100 litros de alcohol puro:

$78{,}5\%\,.\,4V = 100\,.\,100\% + 40\%(V-20) + 60\%(V-10) + 80\%(V-30) + 50\%(V-40)$

$314V = 4200 + 230V$

$84V = 4200 \Rightarrow V = 50$ litros.

$\therefore$ El volumen inicial del recipiente de 80% es 20 litros.

Clave B

29. Sea n el número de horas para obtener una mezcla al 56%.

En n horas el primer grifo vertió:

$x = 2 + (2+4) + (2+4\,.\,2) + ... + (2 + 4(n-1))$

$x = 2n + 4\dfrac{(n-1)(n)}{2} = 17 = 2n^2$

En n horas el 2.° grifo vertió:

$y = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}$

$y = \dfrac{2^n - 1}{2-1} = 2^n - 1$

Luego:

$\dfrac{49\% + 64\%y}{x+y} = 56\%$

$\dfrac{49.2n^2 + 64(2^n - 1)}{2n^2 + 2^n - 1} = 56$

$49n^2 + 32\,.\,2^n - 32 = 28(2n^2 + 2^n - 1)$

$49n^2 + 32\,.\,2^n - 32 = 56n^2 + 28\,.\,2^n - 28$

$4.2^n - 4 = 7n^2$

$4(2^n - 1) = 7n^2 \quad ...(1)$

$\therefore$ El único valor que verifica (1) es: n = 6 h

Clave B

30. Sea x el peso en gramos de una moneda de aleación de plata y cobre.

Las leyes de los lingotes son:

$L_1 = 0{,}920;\ L_2 = 0{,}840 \wedge L_3 = 0{,}750$

Del enunciado:

$P_1\,.\,0{,}920 = P_2\,.\,0{,}840 = P_3\,.\,0{,}750$

$92P_1 = 84P_2 = 75P_3 = k$

Del enunciado:

$P_3 - P_1 = 119$

$\dfrac{k}{75} - \dfrac{k}{92} = 119 \Rightarrow \dfrac{17k}{6900} = 119$

$k = 48\,300$

Peso total $= P_1 + P_2 + P_3$

$= k\left(\dfrac{1}{92} + \dfrac{1}{84} + \dfrac{1}{75}\right) = 1744$

x = Peso de cada moneda $= \dfrac{1744}{109}$

$\therefore\ x = 16$ g

Clave C

MARATÓN MATEMÁTICA (página 72)

1. 25a, 18a } 200 — 20a, 20a
17a } x — 20a

$5a = 200 \Rightarrow a = 40$

También:

$17a + x = 20a$

$\Rightarrow x = 3a$

$\therefore x = 120$

Clave A

2.

	DP	DP
N	a → 3l	5l
	2a → 6l	6l
	3a → 9l	9l
	4a → 12l	10l

$\Rightarrow N = 10a = 30l$, $a = 3l$

$\Rightarrow 12l - 10l = 28; \Rightarrow l = 14$

$\therefore 5l = 70$

Clave A

3. R → $C_R = 1000$
P → $C_P = 2000$
J → $C_J = 3000$

D.P.

G_R 15.1000 → 5k
G_P 12.2000 → 8k
G_J 8.3000 → 8k

$21k = 5250$

$k = 250$

$\therefore 5k = 1250$

Clave C

4. $\dfrac{(\text{n.° obreros})(\text{h/d})(\text{n.° días})}{\text{obra}} = k$

$\dfrac{15.12.16}{4.2.1{,}5} = \dfrac{20.x.18}{3.1{,}5.2}$

$\therefore x = 6$

Clave D

5. 4e, 20 obreros, 14 días | 4e y 3e, 10 y 10, t días
N | N

$\Rightarrow 14\,.\,20\,.\,4e = t(10\,.\,4e + 10\,.\,3e)$

$16 = t$

$\therefore 14 + 16 = 30$ días

Clave C

6. $1{,}2\ m^3$ — x
25 fam. — 40 fam.
150 días — 200 días

$150\,.\,25\,.\,1{,}2 = x\,.\,40\,.\,200$

$\dfrac{9}{16} = x$

$1{,}2 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{51m^3}{80}$

$\dfrac{51}{80}\ m^3\,.\,\dfrac{1000\ L}{1\ m^3} = 637{,}5$ L

Clave D

7.

	1°		2°		3°
H_2O	a	+	2b	=	5a
Vino	a		b		3a

$3b = 6a$

$b = 2a$

$\therefore \dfrac{5a}{8a}.100\% = 62{,}5\%$

Clave B

8. $V_1 = 1000\ u^3 \rightarrow A_1$

$V_2 = 51{,}2\%1000 = 512\ u^3 \rightarrow A_2$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{1000}^2}{\sqrt[3]{512}^2} = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{100}{64}$

$\left(\dfrac{A_2 - A_1}{A_1}\right) \times 100 = \left(\dfrac{100-64}{100}\right) \times 100$

$\therefore \dfrac{36}{100}\,.\,100\% = 36\%$

Clave D

9. Sea k el precio de una camisa

Sea n el n.° de camisas que podría comprar.

Del enunciado:

(Descuento único) = 100% – 80%.75% = 40%

Luego:

k.n = (100–40)% k. (n + 6)

k.n = 60%k (n + 6)

$n = \dfrac{3}{5}(n+6) \Rightarrow n = 9$

Si solo hiciera un descueto del 10%:

k.n = 90% k.x

9 = 90%x

$\Rightarrow$ x = 10 camisas

Clave A

10. Se preparó:

	V_1	
Vino	60 L	← x L de vino
H_2O	15 L	

Luego:

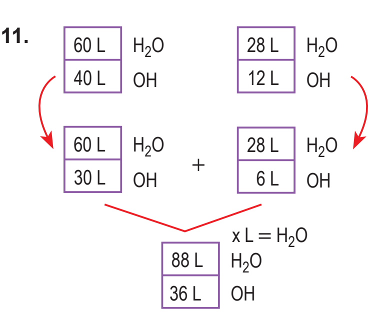
$\dfrac{15}{60+x} = \dfrac{1}{5}$

$60 + x = 75$

$\therefore\ x = 15$

Clave B

11.



Luego:

$\left(\dfrac{36}{x + 124}\right)100\% = 25\%$

$\therefore x = 20$

Clave D

INTERÉS

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 75) Unidad 4

1. Sea C el capital.

Sabemos:

$$I = \frac{C.r.t}{36\,000} \text{ (t en días)}$$

$$30 = \frac{C.6.20}{36\,000}$$

$$30 = \frac{C}{300}$$

$\therefore C = S/.9000$

Clave D

2. Sea t el tiempo que debe ser prestado el capital.

Sabemos:

$M = C + I$

$3C = C + C . 20\% . t$

$$2C = \frac{C.20.t}{100}$$

$\therefore t = 10$ años

Clave C

3. Sea C el capital.

Del enunciado se tiene:

$C(1 + 5\% . 3) = 3174$

$C(1 + 0{,}15) = 3174$

$C . 1{,}15 = 3174$

$\therefore C = S/.2760$

Clave C

4. Sabemos:

$$I = \frac{C \times r \times t}{100} \text{ (t en años)}$$

$$I = \frac{4000 \times 8 \times 3}{100}$$

$\therefore I = S/.960$

Clave B

5. Sea M el monto obtenido.

8% bimestral <> 48% anual

1 año y 3 meses <> 15 meses

Dato: C = S/.320

Sabemos: M = C + I

$$M = C + \frac{C \times r \times t}{1200}$$

$$M = 320 + \frac{320 \times 48 \times 15}{1200}$$

$M = 320 + 192$

$\therefore M = S/.512$

Clave E

6. Sea M el monto producido.

Datos:

C = S/.40 000

t = 4 años

r% = 10% semestral <> 20% anual

Como se trata de un interés compuesto.

M = C(1 + r%)n, n = 4 periodos

M = 40 000(1 + 20%)4

$$M = 40\,000\left(1+\frac{1}{5}\right)^4 = 40\,000\left(\frac{6}{5}\right)^4$$

$$M = \frac{40\,000 \times 1296}{625}$$

$\therefore M = S/.82\,944$

Clave C

7. C_1

$t_1 = 1$ año

$r_1 = 1\%$ mensual $= 12\%$ anual

C_2

$t_2 = 1$ año

$r_2 = 5\%$ trimestral $= 20\%$ anual

C_3

$t_3 = 1$ año

$r_3 = 4\%$ semestral $= 8\%$ anual

$$\Rightarrow I_1 = \frac{C_1 \times 12 \times 1}{100} = \frac{3C_1}{25}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{C_2 \times 20 \times 1}{100} = \frac{C_2}{5}$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{C_3 \times 8 \times 1}{100} = \frac{2C_3}{25}$$

$\Rightarrow I_{Total} = I_1 + I_2 + I_3 \quad \wedge \quad C_1 = C_2 = C_3$

$$10\,000 = C\left(\frac{3}{25}+\frac{1}{5}+\frac{2}{25}\right)$$

$\Rightarrow C = 25\,000$

$\therefore C_1 + C_2 + C_3 = 25\,000(3) = S/.75\,000$

Clave B

8. Por dato:

$C_1 - C_2 = 8000 \quad ...(1)$

Del enunciado: $I_1 = I_2$

$$\frac{C_1 \times 4 \times 1}{100} = \frac{C_2 \times 5 \times 1}{100} \Rightarrow 4C_1 = 5C2$$

$$C_1 = \frac{5C_2}{4} \quad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{5C_2}{4} - C_2 = 8000$$

$\Rightarrow C_2 = S/.32\,000$

Reemplazando en (2):

$C_1 = \frac{5}{4}(32\,000) = S/.\ 40\,000$

$\therefore C_1 + C_2 = S/.72\,000$

Clave D

9. $C_1 + C_2 + C_3 = 76\,000$

$I = C_1(4\%)(1) = C_2(8\%)(1) = C_3(10\%)(1)$

$2C_1 = 4C_2 = 5C_3$

$$\frac{C_1}{10} = \frac{C_2}{5} = \frac{C_3}{4} = k$$

$\Rightarrow 10k + 5k + 4k = 76\,000$

$19k = 76\,000$

$k = 4000$

Piden: $C_1 = 10k = 10(4000)$

$\therefore C_1 = S/.40\,000$

Clave A

10. $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{5}{7}$

$\Rightarrow C_1 = 5k \quad \wedge \quad C_2 = 7k$

$r_1\% = 24\% \qquad r_2\% = 20\%$

Del enunciado:

$I_1 - I_2 = 3620$

$C_2 . r_2\% . 1 - C_1 . r_1\% . 1 = 3620$

$7k . 20\% . 1 - 5k . 24\% . 1 = 3620$

$140\%k - 120\%k = 3620$

$20\%k = 3620$

$k = 18\,100$

Piden: $C_1 = 5k = 5(18\,100)$

$\therefore C_1 = S/.90\,500$

Clave C

11. C = 72 000

0,4% diar. <> 144% anual

15% mens. <> 180% anual

$M_1 = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C . 144\%$

$M_2 = \frac{1}{6}C + \frac{1}{6}C . 144\%$

$\vdots$

$M_8 = \frac{1}{72}C + \frac{1}{72}C . 144\%$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{72}\right)C = \frac{8}{9}C$$

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)$$

$\Rightarrow C_9 = \frac{1}{9}C$

$M_9 = \frac{1}{9}C + \frac{1}{9}C . 180\%$

$M_1 + M_2 + M_3 + ... + M_9 = M_T$

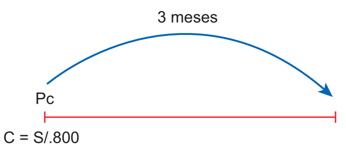
$M_T = C + \frac{8}{9}C . 144\% + \frac{1}{9}C . 180\%$

$M_T = 2{,}48C = 2{,}48(72\,000)$

$\therefore M_T = \$/178\,560$

Clave E

12.



Pv = 800 + 20%800 = S/.960

Deposita su dinero en el banco (3 meses).

Del enunciado:

M + 140 = 960

M = 820

$$800 + \frac{800 \times r \times 3}{1200} = 820$$

$2r = 20 \Rightarrow r\% = 10\%$

Si deposita su dinero por un tiempo total t:

M = 960

$$800 + \frac{800 \times 10 \times t}{1200} = 960$$

$$\frac{80t}{12} = 160 \Rightarrow t = 24 \text{ meses}$$

Piden:

Tiempo adicional que tiene que dejar su dinero.

$\therefore t - 3 = 24 - 3 = 21$ meses

Clave A

13. Sea C = 30m, el capital.
9% trimestral <> 36% anual
16% bimestral <> 96% anual

Del enunciado:
$I_1 = 12m \cdot 36\%t$
$I_2 = 3m \cdot 96\%t$
$I_3 = 15m \cdot x\%t$
Luego:
$12m \cdot 36\% + 3m \cdot 96\% = 15m \cdot x\%$
$720m\% = 15mx\%$
$\Rightarrow x = 48$
$\therefore x\% = 48\%$ anual <> 4% mensual

Clave C

14. C = S/.66 200
Sea M la cuota mensual.
Al finalizar el 1.[er] mes la deuda es:
110%(66 200) – M = 72 820 – M

Al finalizar el 2.° mes la deuda es:
110%(72 820 – M) – M

Al finalizar el 3.[er] mes la deuda es:
110% [110% (72 820 – M) – M] – M = 0
100% [80 102 – 210%M] = M
88112,2 = 331%M
∴ M = S/.26 620

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 77) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

2.

3. Sabemos:
$$I = \frac{C \times r \times t}{100} \Rightarrow 40 = \frac{200 \times r \times 2}{100} \Rightarrow r = 100$$
Luego:
$$I_1 = \frac{200 \times 10 \times 1}{100} \Rightarrow I_1 = S/.\ 20$$
$$M = 200 + I_1 + I_2 \Rightarrow M = S/.\ 260$$

Razonamiento y demostración

4. FFV

5. I. V
r% trimestral < > 4r% anual
$$I = \frac{C \times (4r) \times t}{1200} \Rightarrow I = \frac{C \times r \times t}{300}$$
II. V
r% bimestral < > 6r% anual
$$I = \frac{C \times (6r) \times t}{36\,000} \Rightarrow I = \frac{C \times r \times t}{6000}$$
III. F
r% semestral < > 2r% anual
$$I = \frac{C \times (2r) \times t}{100} \Rightarrow I = \frac{C \times r \times t}{50}$$
IV. V

Resolución de problemas

6. C = 3680 ∧ r = 30% ∧ t = 5 años
$$I = \frac{3680 \times 30 \times 5}{100}$$
∴ I = S/.5520

Clave B

7. t = ?
r = 20% anual
M = 3C
I + C = 3C
$$\frac{C \times t \times 20}{100} + C = 3C$$
20t + 100 = 300
⇒ t = 10
Debe ser prestado durante 10 años.

Clave B

8. C = $2700
I = $225
t = 1 año y 8 meses = 20 meses
r = x% anual
$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} = \frac{2700 \cdot x \cdot 20}{1200}$$
45x = 225
x = 5
La tasa es 5% anual.

Clave A

9. Sea C el capital.
15% semestral <> 30% anual
C + I = 5000 (dato)
C + C × 30% . 5 = 5000
100%C + 150%C = 5000
250%C = 5000
∴ C = S/.2000

Clave E

10. $M = (1 + 50\%)^4 \times 1600$
2 años <> 4 semestres
25% trim. <> 50% semestral

Luego:
$I = 1600(1 + 50\%)^4 - 1600$
I = S/.6500

Clave D

Nivel 2 (página 77) Unidad 4

Comunicación matemática

11. Del gráfico:
100 = C + I
100 = C (1 + r% × 1) ...(1)
140 = C + I
140 = C (1 + r% × 3) ...(2)
Dividiendo (1) y (2):
$$\frac{5}{7} = \frac{1 + r\%}{1 + 3r\%} \Rightarrow 5 + 15r\% = 7 + 7r\%$$
8r% = 2
r% = 1/4 = 25%

Reemplazando en (1):
100 = C(1 + 25%) = C × 5/4 ⇒ C = S/. 80
Además:
$$x = C + I = C + \frac{C \cdot r \cdot (0)}{100}$$
x = C ⇒ x = 80
$$x + 100 = C + \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$
$$180 = 80 + \frac{80 \cdot 25 \cdot y}{100}$$
100 = 20 . y ⇒ y = 5
Nos piden: x + y = 85

Clave E

12. Se observa del gráfico: $C = \overline{a00}$
$\overline{a84} - \overline{a00} = C \times r\% \times 2$
$84 = C \times r\% \times 2$
$\Rightarrow C \cdot r\% = 42$

$\underbrace{\overline{8bc} - \overline{a00}} = C \times r\% \times 7$

$\overline{(8-a)bc} = 42 \times 7$
$\overline{(8-a)bc} = 294$
$\begin{cases} a = 6 \\ b = 9 \\ c = 4 \end{cases}$
Entonces: C = 600
Luego:
$$600\left(\frac{r}{100}\right) = 42 \Rightarrow r = 7$$
∴ a + b + c + r = 26

Clave D

Razonamiento y demostración

13. $x^2 - \overline{mn}\,x + 156 = 0$
⇒ r . t = 156
$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$
$\overline{abc} \cdot 100 = \overline{d2d} \cdot 156$
$\overline{abc} \cdot 25 = \overline{d2d} \cdot 39$
↓
5
$25\overline{abc} = 525 \cdot 39$
$\overline{abc} = 819$
⇒ a = 8; b = 1 ∧ c = 9

I. V
$\overline{ab}_{(c)} = 81_{(9)} = 73$
II. F
$CD(\overline{ab}) = CD(81) = 5$
↓
3^4
III. F
$(m+n)^{b-1} = (m+n)^{1-1} = (m+n)^0 = 1$

14. M = C + I = C + C × r%t
M = C (1 + r%t)
$$\frac{M}{C} = 1 + r\%t$$
$$\Rightarrow \frac{M}{C} - 1 = r\%t \Rightarrow r\% = \frac{1}{t}\left(\frac{M}{C} - 1\right)$$

Resolución de problemas

15. Sean C_1 y C_2 dos capitales y t el tiempo de imposición del 1.er capital.

Del enunciado:

$$\frac{C_1+C_2}{C_1-C_2}=\frac{79}{19}=\frac{79k}{19k}$$

$\Rightarrow C_1+C_2=79k$
$C_1-C_2=19k$ (+)

$2C_1=98k$

$\Rightarrow C_1=49k \quad \wedge \quad C_2=30k$ ...(1)

$I_1=I_2$ (dato)

$$\frac{C_1\times 3\times t}{36\,000}=\frac{C_2\times 3{,}5\times(t+36)}{36\,000}$$

$3C_1\times t=3{,}5C_2(t+36)$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2):

$3\times 49k\times t=\frac{7}{2}\times 30k(t+36)$

$7t=5(t+36)$

$7t=5t+180$

$\therefore t=90$ días

Clave A

16. Por dato: r%mensual = 5%

Además: $I^2=C(M+C)$

$(C\times 5\%\times t)^2=C(2C+C\times 5\%\times t)$

$C^2(5\%\times t)^2=C^2(2+5\%t)$

Sea: $5\%t=a$

$\Rightarrow a^2=2+a$

Resolviendo: $a=2$

Entonces: $5\%t=2$

$\therefore t=40$ meses

Clave E

17. C: $\overline{abc00}=\overline{abc}\times 100$

t: 10 meses

r = 9,6% anual <> 0,8% mensual

$M=27k$

$I=bk$

$C=c^2k$

Luego:

$I=\overline{abc}\times 100\times 0{,}8\%\times 10$

$I=\overline{abc}\times 8=\overline{abc}\times 2\times 4$

$M=\overline{abc}\times 108=\overline{abc}\times 27\times 4$

$C=\overline{abc}\times 100=\overline{abc}\times 25\times 4$

$\Rightarrow k=\overline{abc}\,.\,4$

Se deduce: $b=2 \quad \wedge \quad c=5$

Por dato:

$\overline{abc}\times 108=\overline{a(b+c)c}\times 100$

$\overline{a25}\times 108=\overline{a75}\times 100$

$8a=48$

$a=6$

$\therefore\ a+b+c=13$

Clave A

18. Sean C_1 y C_2 los capitales.

$\frac{C_1}{C_2}=\frac{8}{9}\Rightarrow C_1=8k \quad \wedge \quad C_2=9k$ ... (1)

Sabemos:

2% cuatrimestral <> 6% anual

2% trimestral <> 8% anual

M = S/.2875 (al cabo de 5 años)

$C_1+C_1\times 6\%\times 5+C_2+C_2\times 8\%5=2875$

$8k+8k\times 30\%+9k+40\%\times 9k=2875$

$17k+240\%k+360\%k=2875$

$17k+6k=2875$

$23k=2875$

$\Rightarrow k=125$

Reemplazando el valor de k en (1):

$C_1=$ S/.1000 $\wedge$ $C_2=$ S/.1125

$C=C_1+C_2=$ S/.2125

5% trimestral <> 20% anual

Piden:

$M=C(1+r\%)^n=2125(1+20\%)^2$

$M=2125\left(\frac{6}{5}\right)^2$

$\therefore M=$ S/.3060

Clave A

19. 5% trimestral <> 20% anual

$M_1=C(1+r\%)^n$ (interés compuesto)

$M_2=C(1+r\%t)$ (interés simple)

$M_2-M_1=269$ (dato)

$C(1+20\%3)-C(1+10\%)^3=269$

$C(1+\frac{3}{5})-C(1+\frac{1}{10})^3=269$

$\frac{8C}{5}-\frac{1331C}{1000}=269$

$\frac{8000C-6655C}{5000}=269$

$\frac{1345}{5000}C=269$

$\Rightarrow C=$ S/.1000

$M_1=1000(1+10\%)^3=1000(1+\frac{1}{10})^3$

$M_1=1000\times\frac{1331}{1000}\Rightarrow M_1=$ S/.1331

$G=M_1-C=1331-1000=331$

Por lo tanto, la ganancia es S/.331

* Debe considerarse que se hubiera obtenido S/.269 más si lo depositaba a interés simple.

Clave E

20. $I_{total}=45\%C$

$I_1=5\%\ C\times 1$

$I_2=6\%\ C\times 1$

$I_3=7\%\ C\times 1$

⋮

$I_n=(n+4)\%\ C\times 1$

Sumando

$I_1+I_2+I_3+\ldots+I_n=\left[\frac{5+(n+4)}{2}\right]n\%C$

$45\%C=\left[\frac{n+9}{2}\right]n\%C$

$45=\frac{(n+9)n}{2}$

$\Rightarrow n(n+9)=6(6+9)$

$\therefore n=6$

Clave B

Nivel 3 (página 78) Unidad 4

Comunicación matemática

21. I. $\square=400\left(1+\frac{10}{100}\right)^2=400\left(\frac{11}{10}\right)^2$

$=400\,.\,\frac{121}{100}=484$

II. $135=\square\,.\left(1+\frac{1}{2}\right)^3$

$135=\square\ \frac{27}{8}$

$40=\square$

III. $7776=3125\,(1+20\%)^{\square}$

$6^5=5^5\left(1+\frac{1}{5}\right)^{\square}$

$\left(\frac{6}{5}\right)^5=\left(\frac{6}{5}\right)^{\square}\Rightarrow\square=5$

22. En la 1.ª fila:

$I=\frac{200\times 20\times 4}{100}\Rightarrow I=$ S/. 160

$M=200+160\Rightarrow M=$ S/. 360

En la 2.ª fila:

Sabemos: $M=C+I$

$500=400+I\Rightarrow I=$ S/. 100

Además: $I=\frac{C\times r\times t}{100}$

$100=\frac{400\times r\times 5}{100}\Rightarrow r=5$

En la 3.ª fila:

Sabemos: $M=C+I$

$110=C+10\Rightarrow C=$ S/. 100

Además: $I=\frac{C\times r\times t}{100}$

$10=\frac{100\times 2\times t}{100}\Rightarrow t=5$ años

Razonamiento y demostración

23. $r;\ rk\ ;\ rk^2\ ;\ rk^3$

↓ ↓ ↓
t I C

$I=\frac{C\times r\times t}{100}$

$rk=\frac{rk^3\times r\times rk}{100}\Rightarrow \begin{array}{l} r^2k^2=100\\ rk=10\end{array}$

I. Si r = 5, entonces k = 2

Luego: $C=rk^3=(5)(2)^3\Rightarrow C=$ S/.40

II. Si k = 2, entonces r = 5

Luego: $C=rk^3=(5)(2)^3\Rightarrow C=$ S/.40

$\therefore$ Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.

Clave D

24. Sabemos:

$\overline{ab}=\frac{\overline{mnp}\times r\times t}{100}$

I. V

Del enunciado:

$\overline{ab}=12=\overset{\circ}{3}, \quad r+t=p$

↓ ↓ ↓
2 3 5

$12 = \frac{\overline{mnp} \times 2 \times 3}{100}$

$\Rightarrow \overline{mnp} = 200$

$\therefore\ m + n + p = 2$

II. F

$\overline{ab} = \frac{100 \times 2a \times b}{100}$

$10a + b = 2a \times b$

$10a = b\,(2a - 1)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$3 \quad 6$

$\therefore\ a + b + m = 3 + 6 + 1 = 10$

III. V

$t, r = tk,\ \overline{ab} = tk^2,\ \overline{mnp} = tk^3$

$tk^2 = \frac{tk^3 \times tk \times t}{100}$

$100 = t^2 k^2 \Rightarrow tk = 10$

Además:

$\overline{ab} = 10k < 43$

$\downarrow$

$1;\ 2;\ 3;\ 4$

$\overline{mnp} = 10k^2 \Rightarrow k = 4;\ 5;\ ...$

Entonces:

$\overline{ab} = 40 \quad \overline{mnp} = 160$

$\therefore\ a + p = 4$

Resolución de problemas

25. $\left(\frac{r\%}{12}\right)C\,.\,\frac{3}{5}t + \frac{6}{5}\left(\frac{r\%}{12}\right)Ct = \frac{r}{12}(1 + x\%)\%C\frac{8}{5}t$

Reduciendo:

$3r + 6r = r(1 + x\%)8$

$9 = (1 + x\%)8$

$x = 12{,}5$

Clave D

26. Sabemos: $M = C + I$

$\frac{C_1}{a} = \frac{C_2}{b} = \frac{C_3}{c} = k$

Dato: $ak + bk + ck = 306\ 000$

Luego:

$M_1 = ak + ak(a + 1)\%(1)$

$M_2 = bk + bk(b + 2)\%(1)$

$M_3 = ck + ck(c + 3)\%(1)$

Del enunciado:

$\frac{M_1}{a^2} = \frac{M_2}{b^2} = \frac{M_3}{c^2}$

Simplificando:

$\frac{1 + (a + 1)\%}{a} = \frac{1 + (b + 2)\%}{b} = \frac{1 + (c + 3)\%}{c}$

$\frac{a + 101}{a} = \frac{b + 102}{b} = \frac{c + 103}{c}$

$\frac{101}{a} = \frac{102}{b} = \frac{103}{c}$

$\Rightarrow a = 101n;\ b = 102n;\ c = 103n$

Entonces:

$101nk + 102nk + 103nk = 306\ 000$

$nk = 1000$

Piden: $C_3 = 103nk =$ S/.103 000

Clave C

27. Sea C el capital prestado.

Del enunciado:

$M_1 - M_2 =$ S/.2779 ... (I)

Donde:

M_1: monto que recibe Juan de la financiera.

M_2: monto que Juan devuelve a José.

De (1):

$C(1 + 20\%)^3 - C(1 + 10\%)^3 = 2779$

$\frac{1728C}{1000} - \frac{1331C}{1000} = 2779$

$\frac{397}{1000}C = 2779$

$\therefore\ C =$ S/.7000

Clave B

28. $M = (1 + 10\%)^4 \times 42\ 000$

$M = 61492{,}2$

$A_{mort.} = 110\%N + N = 210\%N$

Para cancelar la deuda:

$A_{mort.} = M$

$210\%N = 61492{,}2$

$\Rightarrow N = 29\ 282$

$\therefore\ \Sigma$ cifras $= 23$

Clave D

29. Datos:

$I_1 - I_2 = 25\ 300$

$\frac{66\ 000 \times 60 \times t}{36\ 000} - \frac{66\ 000 \times 30 \times t}{36\ 000} = 25\ 300$

$\frac{66\ 000 \times 30t}{36\ 000} = 25\ 300 \Rightarrow t = 460$ días

460 días <> 1 año 3 meses 10 días

Del enunciado:

$I = \frac{C \times 70 \times 1}{100} + \frac{C \times 48 \times 3}{1200} + \frac{C \times 27 \times 10}{36\ 000}$

$I = \frac{66\ 000 \times 70}{100} + \frac{66\ 000 \times 144}{1200} + \frac{66\ 000 \times 270}{36\ 000}$

Operando:

$I = 46\ 200 + 7920 + 495$

$\therefore\ I =$ S/.54 615

Clave A

30.

Capital	Tasa	Tiempo
5k	20% semestral <> 40% anual	18 meses
8k	25% cuatrimestral <> 75% anual	16 meses

Del enunciado:

$M_{total} - C_{total} =$ S/.1375

$\left[\left(5k + \frac{5k \times 40 \times 18}{1200}\right) + \left(8k + \frac{8k \times 75 \times 16}{1200}\right)\right] - (5k + 8k) = 1375$

$[(5k + 3k) + (8k + 8k)] - 13k = 1375$

$24k - 13k = 1375$

$11k = 1375$

$\Rightarrow k = 125$

$C_{total} = 13k =$ S/.1625

40% semestral <> 20% trimestral

$M = 1625(1 + 20\%)^3$

$\therefore\ M =$ S/.2808

Clave A

APLICAMOS LO APRENDIDO
(página 80) Unidad 4

1. De los siguientes datos:

9; 9; 10; 10; 11; 12 ; 13; 14; 14; 14; 16; 20

Hay 12 datos.

$Me = \frac{12+13}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$

Luego hay:
9 (2 veces)
10 (2 veces)
11 (1 vez)
12 (1 vez)
13 (1 vez)
14 (3 veces) $\Leftarrow Mo = 14$
16 (1 vez)
20 (1 vez)

$\therefore$ Me + Mo = 26,5

Clave B

2. Ordenando los datos:

20; 21; 21; 25 ; 26; 30

$Me = \frac{21+25}{2} = \frac{46}{2}$

$\therefore$ Me = 23

Clave A

3. $4w = 91 - 51 = 40 \Rightarrow w = 10$

Completando el cuadro:

I_i	x_i	f_i	F_i
[51; 61⟩	56	6	e = 6
[a; 71⟩	66	12	18
[71; b⟩	76	f = 22	40
[81; 91]	86	10	50

$\Rightarrow a = 61; b = 81; c = 56; d = 86$
$e = 6$ y $f = 22$
$\therefore a + b + c + d + e + f = 312$

Clave E

4.

I_i	x_i	f_i	F_i
[6; 16⟩	11	10	10
[16; 26⟩	21	16	26
[26; 36⟩	31	20	46
[36; 46⟩	41	9	55
[46; 56]	51	5	60
	n =	60	

Clase mediana $46 > \frac{60}{2} = 30$

Sabemos:

$$Me = L_m + W_m\left[\frac{\frac{n}{2} - F_{(m-1)}}{f_m}\right]$$

$$Me = 26 + (36-26)\left[\frac{\frac{60}{2} - 26}{20}\right]$$

$$Me = 26 + 10\left[\frac{4}{20}\right] = 26 + 2$$

$\therefore$ Me = 28

Clave D

5.

I_i	x_i	f_i	$X_i f_i$
[10; 24⟩	17	14	238
[24; 38⟩	31	26	806
[38; 52⟩	45	24	1080
[52; 66]	59	16	944
	n =	80	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} f_i x_i}{n} = \frac{238 + 806 + 1080 + 944}{80}$$

$$\bar{x} = \frac{3068}{80}$$

$\therefore \bar{x} = 38{,}35$

Clave A

6.

I_i	f_i
[26; 34⟩	16
[34; 42⟩	25
[42; 50⟩	29
[50; 58⟩	23
[58; 66]	10
	103

→ Clase modal (fila [42; 50⟩)

Sabemos:

$$Mo = L_o + w_o\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) \quad ...(1)$$

$d_1 = 29 - 25 = 4$
$d_2 = 29 - 23 = 6$

En (1):

$$Mo = 42 + (50 - 42)\left(\frac{4}{4+6}\right)$$

$$\Rightarrow Mo = 42 + 8 \times \frac{4}{10} = 42 + 3{,}2$$

$\therefore$ Mo = 45,2

Clave E

7. 30% $\Rightarrow 6n°$
100% $\Rightarrow 360°$

$$6n° = \frac{30\% \times 360°}{100\%}$$

$6n° = 108°$
$\therefore n = 18$

Clave B

8. Sean las edades de 4 personas, ordenadas de menor a mayor:

a; b; c; d

$$\bar{x} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

$$24 = \frac{a+b+c+d}{4}$$

$a + b + c + d = 96$ ...(I)

$$Me = \frac{b+c}{2}$$

$23 = \frac{b+c}{2} \Rightarrow b + c = 46$ ...(II)

a b c d
↓ (entre b y c)
Me = 23

Como a; b < 23, entonces:

a = b = Mo = 22

Reemplazando: b = 22 en (II):

$\Rightarrow c = 24$

Reemplazando los valores de a, b y c en (I):

$\Rightarrow d = 28$

$\therefore$ La mayor de las edades es 28 años.

Clave E

9.

I_i	x_i	f_i
[1; 3⟩	2	20
[3; 5⟩	4	a
[5; 7⟩	6	b
[7; 9]	8	20

$\frac{f_2}{f_3} = \frac{a}{b}$

$\frac{1}{5} = \frac{a}{b} \Rightarrow b = 5a$ ...(I)

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i f_i}{n} = 5{,}4$$

$$\frac{2 \times 20 + 4 \times a + 6 \times b + 8 \times 20}{20 + a + b + 20} = 5{,}4$$

$$\frac{40 + 4a + 6b + 160}{40 + a + b} = \frac{27}{5}$$

$$\frac{200 + 4a + 6b}{40 + a + b} = \frac{27}{5} \quad ...(II)$$

Reemplazando b = 5a en (II):

$$\frac{200 + 4a + 6(5a)}{40 + a + 5a} = \frac{27}{5}$$

$5(200 + 34a) = 27(40 + 6a)$
$1000 + 170a = 1080 + 162a$
$8a = 80$
$\Rightarrow a = 10 \wedge b = 50$

$\therefore$ Por lo tanto: Hay (b + 20) = 70 familias que tienen un ingreso no menor de 5 mil soles.

Clave C

10. Completando la tabla:

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[30; 50⟩	18	18	0,20	0,20
[50; 70⟩	a		0,10	0,30
[70; 90⟩	27		0,30	0,60
[90; 110]			0,40	1
	n			

$h_3 = \frac{27}{n}$

$0{,}30 = \frac{27}{n} \Rightarrow n = 90 \Rightarrow h_1 = \frac{f_1}{n} = \frac{18}{90} = 0{,}20$

Luego: $h_2 = 0,10 \Rightarrow \frac{a}{90} = 0,10 \Rightarrow a = 9$

$\therefore f_2 + h_1 = 9 + 0,20 = 9,2$

Clave A

11.

	Llamadas	Promedio
[0; 3 min⟩	70	2,3 min
[3; 10 min⟩	40	6,4 min
[10; a más]	10	15 min

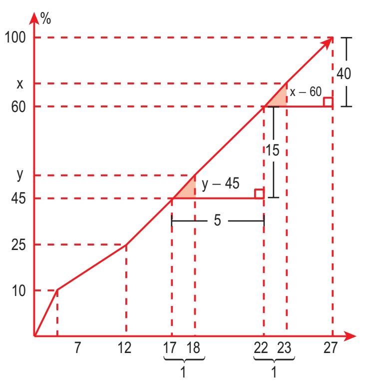
$$\text{Duración promedio} = \frac{70 \times 2,3 + 40 \times 6,4 + 10 \times 15}{70 + 40 + 10}$$

$$\text{Duración promedio} = \frac{161 + 256 + 150}{120}$$

$$\text{duración promedio} = \frac{567}{120} = 4,725 \text{ min}$$

Clave C

12.



Se observa:

$\frac{y - 45}{1} = \frac{15}{5}$ (por semejanza)

$y - 45 = 3 \Rightarrow y = 48$

$\frac{x - 60}{1} = \frac{40}{5}$ (por semejanza)

$x - 60 = 8 \Rightarrow x = 68$

Piden: $x\% - y\% = 20\%$

Clave C

13. Del enunciado: $f_4 = f_5$

Completando el cuadro.

I_i	f_i	F_i
[5; 15⟩	3k	3k
[15; 20⟩	2k	5k
[20; 25⟩	5k	10k
[25; 30⟩	n	10k + n
[30; 40⟩	n	14k
[40; 45]	k	15k
	15k	

$10k + n + n = 14k$

$2n = 4k$

$n = 2k$

Tienen menos de 20 años: 10k

Piden:

$\frac{10k}{15k} \times 100\% = 66,\widehat{6}\%$

Clave B

14.

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[30; 50⟩		a = 10	10	0,2	0,2
[50; 70⟩	b	20	30		
[70; 90⟩		15	45		0,9
[90; 110]		5	50	d	1
		50			

$d = 0,1$

$a = 0,2 \times 50$

$\Rightarrow a = 10$

$\Rightarrow Me = 50 + 20\left(\frac{25 - 10}{20}\right)$

$\therefore Me = 65$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 82) Unidad 4

Comunicación matemática

1. Del gráfico circular:

$11n + 72° = 270° \Rightarrow n = 18°$

Por dato: $\frac{90°}{360°} \times T = 100$

$\Rightarrow T = 400$

Piden: $\frac{6 \cdot 18°}{360°} \times T = \frac{3}{10}(400) = 120$

Clave B

2.

Intervalos	f_i	F_i	h_i	$h_i \times 100\%$	$H_i \times 100\%$
[24; 34⟩	a = 8	8	0,08	8%	8%
[34; 44⟩	b = 32	40	0,32	32%	40%
[44; 54⟩	42	82			
[54; 64]	18	100			100%
Total	n = 100				

$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 1$

$0,08 + 0,32 + \frac{42}{n} + \frac{18}{n} = 1$

$0,40 + \frac{60}{n} = 1$

$\frac{60}{n} = 0,6 \Rightarrow n = 100$

$h_1 = 0,08$ $\qquad$ $h_2 = 0,32$

$\frac{a}{100} = 0,08$ $\qquad$ $\frac{b}{100} = 0,32$

$\Rightarrow a = 8$ $\qquad$ $\Rightarrow b = 32$

$\therefore f_1 + f_3 + F_3 = 8 + 42 + 82 = 132$

Clave B

3. Completando el cuadro:

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[10; 20⟩	a = 8	8	0,1	0,1
[20; 30⟩	b = 6	14	0,075	0,175
[30; 40⟩	24	38	0,3	0,475
[40; 50⟩	30	68	0,375	0,85
[50; 60]	12	80	0,15	1
	n = 80		1	

Como:

$h_3 = \frac{f_3}{n}$

$0,3 = \frac{24}{n} \Rightarrow n = 80$

$h_4 = \frac{30}{80} \Rightarrow h_4 = 0,375$

$h_1 = \frac{a}{80}$

$0,1 = \frac{a}{80} \Rightarrow a = 8$

$h_2 = \frac{b}{80}$

$0,075 = \frac{b}{80} \Rightarrow b = 6$

Piden:

$f_1 + f_3 + F_4 = 8 + 24 + 68$

$\therefore f_1 + f_3 + F_4 = 100$

Clave D

Razonamiento y demostración

4.

5. I. F

$2; 8; 8 \Rightarrow \begin{cases} Mo = 8 \\ Me = 8 \\ \bar{x} = 6 \end{cases}$

II. F

Del conjunto: 2; 8; 8

$\bar{x} < Me = Mo$

III. F

Del conjunto de datos anterior:

$Me \neq \bar{x}$

Resolución de problemas

6. Sea x el dinero depositado en Suiza.

$25\% \Rightarrow x$

$100\% \Rightarrow \$800$ millones

$x = \frac{25 \times 800}{100} = 200$

$\therefore x = \$200$ millones

Clave D

7. $25\% \longrightarrow \alpha_1$

$100\% \longrightarrow 360°$

$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{25 \times 360°}{100} = 90°$

$25\% \longrightarrow \alpha_2$

$100\% \longrightarrow 360° \Rightarrow \alpha_2 = 90°$

$28\% \longrightarrow \alpha_3$

$100\% \longrightarrow 360° \Rightarrow \alpha_3 = 100,8°$

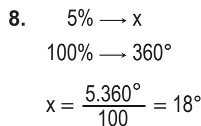
Piden:

$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 90° + 90° - 100,8° = 79,2°$

Clave D

8. 5% ⟶ x

100% ⟶ 360°



$x = \dfrac{5.360°}{100} = 18°$

El ángulo que le corresponde a Argentina es 18°

Clave C

9. n.° tardanzas = 20 + 25 + 30 + 30 + 40

= 145

Clave A

10. n.° tardanzas del martes ⟶ 100%

n.° tardanzas de miércoles ⟶ y%

Entonces:

40 ⟶ 100%

25 ⟶ y%

y = 62,5

Piden: 100% – 62,5% = 37,5%

Clave D

11. n.° tardanzas del jueves ⟶ 100%

n.° tardanzas del miércoles ⟶ y%

Entonces:

30 ⟶ 100%

25 ⟶ y%

$y = \dfrac{25 \times 100}{30} \Rightarrow y = 83,\hat{3}$

Piden: 100% – 83,3% = 16,7%

Clave B

Nivel 2 (página 83) Unidad 4

Comunicación matemática

12.

2k 3k m 2m

180 192 210 240 270 280 300

20 30 16 24

n.° pers. = $\dfrac{3}{5}(20) + 30 + 16 + \dfrac{1}{3}(24)$

∴ n.° personas = 66

Clave E

13.

I_i	x_i	f_i	F_i
[200; 400⟩	300	13	13
[400; 600⟩	500	8	21
[600; 800⟩	700	8	29
[800; 1000]	900	13	42

200 + 4w = 1000

w = 200

⇒ n = 42

$\bar{x} = \dfrac{300 \times 13 + 500 \times 8 + 700 \times 8 + 900 \times 13}{42}$

∴ $\bar{x}$ = 600

Clave C

Razonamiento y demostración

14. A = {11; 9; 15; 19; 16; 13; 22}

B = {13; 9; 21; 29; 23; 17; 35}

I. F

Ordenando crecientemente los elementos en A y R:

A = {9; 11; 13; 15; 16; 19; 22}

R = {4; 6; 8; 10; 11; 14; 17}

Mediana de A: 15

Mediana de R: 10

II. F

$\bar{x}_B = 21 \wedge \bar{x}_R = 10$

$\sigma^2{}_B = 489,71 \;\wedge\; \sigma_R{}^2 = 107,42$

III. V

$\bar{x}_A = 15$

$\bar{x}_R < \bar{x}_A < \bar{x}_B$

Clave B

15.

X_i	F_i	F_i	H_i
20	10	10	H_i
40	16	26	0,26 – h_1
60	19	45	h_1 + 0,09
80	26	71	0,26
100	19	90	h_1 + 0,09
120	10	100	h_1

$\sum_{i=1}^{6} h_i = 1$

$h_1 + 0,26 - h_1 + h_1 + 0,09 + 0,26 + h_1 + 0,09 + h_1 = 1$

$3h_1 + 0,7 = 1$

$h_1 = 0,1$

I. V

II. F

III. F

$h_3 + x_1 + F_3 = 65,19$

Resolución de problemas

16. El 10 se repite tres veces.

∴ Moda = 10

Clave A

17. La mediana es 10.

Clave D

18. $\Sigma_{datos} = 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 7 + 8 + 9 + 9 + 10 + 10 + 10 + 11 + 11 + 12 + 13 + 13 + 14 + 15 + 16$

$\Sigma_{datos} = 190$

$\therefore\; \bar{x} = \dfrac{\Sigma_{datos}}{n} = \dfrac{190}{20} = 9,5$

Clave A

19. Hallamos la media:

$\bar{x} = \dfrac{20 + 22 + 22 + 23}{4} = 21,75$

Hallamos la varianza:

$\sigma^2 = \dfrac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \bar{x}^2 = \dfrac{1}{4}(1897) - (21,75)^2$

$\therefore \sigma^2 = 1,1875$

Clave A

20. $\bar{X} = 10$

Me = 11

Mo = 12

Edades:

b aa 12 12 12

↓

11

$\dfrac{a + 12}{2} = 11 \Rightarrow a = 10$

$\dfrac{b + 2 \times 10 + 3 \times 12}{6} = 10 \Rightarrow b = 4$

∴ 12 – 4 = 8

Clave C

Nivel 3 (página 83) Unidad 4

Comunicación matemática

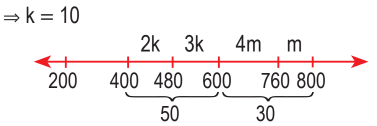
21.

I_i	X_i	f_i
[200; 400⟩	300	10
[400; 600⟩	500	5k
[600; 800⟩	700	3k
[800; 1000]	900	10

$\bar{x} = 580$

$\bar{x} = \dfrac{300 \times 10 + 500 \times 5k + 700 \times 3k + 900 \times 10}{8k + 20}$

⇒ k = 10



El n.º de familias será:

$\dfrac{3}{5}(50) + \dfrac{4}{5}(30) = 30 + 24 = 54$

Clave D

22.

	f_i	h_i
Aprueban	a = 180	
Desaprueban	5b = 100	5d
No sabe / No opina	b = 20	d
	n = 300	

$\dfrac{h_2}{h_3} = \dfrac{\frac{f_2}{n}}{\frac{f_3}{n}} = \dfrac{f_2}{f_3} \Rightarrow \dfrac{f_2}{f_3} = \dfrac{h_2}{h_3} = 5$ (dato)

$f_1 - f_2 = 80 \Rightarrow a - 5b = 80$ ...(1)

$f_1 - f_3 = 160 \Rightarrow a - b = 160$

a = 160 + b ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

(160 + b) – 5b = 80

160 – 4b = 80 ⇒ 4b = 80

⇒ b = 20

Reemplazando el valor de b en (2):

a = 180 ∧ n = 300

$h_3 = \dfrac{b}{n} = \dfrac{20}{300} = \dfrac{1}{15}$

Porcentaje que aprueba al presidente:

$x\% = \left(\dfrac{180}{300}\right)100\% = 60\% \Rightarrow x = 60$

$\Rightarrow n + x + 60h_3 = 300 + 60 + 60\left(\dfrac{1}{15}\right)$

$\therefore n + x + 60h_3 = 364$

Clave E

Razonamiento y demostración

23.

I_i	x_i	f_i	h_i	H_i
[8 – 20⟩	14	10	0,10	0,10
[20 – 32⟩	26	15	0,15	0,25
[32 – 44⟩	38	20	0,20	0,45
[44 – 56⟩	50	25	0,25	0,70
[56 – 68]	62	30	0,30	1
		100		

I. V

$x_5 + f_4 = \overline{ab}$

$62 + 25 = \overline{ab}$

$87 = \overline{ab} \Rightarrow a + b = 15 = \overset{\circ}{3}$

II. F

$CD(x_4) = CD(50)$

$\downarrow$

$2^1 \times 5^2$

$= (1 + 1)(2 + 1) = 6$

III. F

$f_1h_1f_5h_5 = a^b$

$10.0,10.30.0,30 = a^b$

$9 = a^b \Rightarrow a = 3 \wedge b = 2$

$x_5 + a.b = 62 + 3.2$

$= 68 \neq \overset{\circ}{37}$

24. I. F

II. F

Sean los datos $b_1; b_2; \ldots; b_n$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i a}{N} = \frac{a\sum_{i=1}^{n} b_i}{N} = a\bar{x}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\Sigma(ab_i)^2}{N} - \bar{x}_1^2 = a^2\frac{\Sigma b_i^2}{N} - a^2x^2$$

$= a^2\sigma^2 \Rightarrow$ multiplicada por a^2.

III. F

Sean los datos: $b_1; b_2; \ldots; b_n$

$$\bar{x}_1 = \frac{b_1 + a + b_2 + a + \ldots + b_n + a}{N}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{N} + \frac{N.a}{N} = \bar{x} + a$$

IV. F

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 27 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6$

Si $a_6 = 29$, entonces:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + 27 + 28 + 28 + 29}{7} = \frac{142}{7}$$

$a_1 + a_2 + a_3 = 30$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

10 10 10 $\Rightarrow$ 10 sería la moda

(→←)

Si $a_4 = 27 \Rightarrow$ 27 y 28 serían la moda

(→←)

Entonces: $a_4 = a_5 = a_6 = 28$

Luego:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + 27 + 28 + 28 + 28}{7} = \frac{142}{7}$$

$a_1 + a_2 + a_3 = 31$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

10 10 11

Resolución de problemas

25.

I_i	x_i
[; ⟩	
[m; m + w⟩	300
[m + w; m + 2w⟩	
[m + 2w; m + 3w⟩	420
[;]	

Entonces:

$2m + w = 2(300)$ ...(I)

$2m + 5w = 2(420)$ ...(II)

De (I) y (II):

$m = 270 \wedge w = 60$

Piden: $m + 3w = 270 + 3(60) = 450$

Clave C

26. Sean los números: a; b; c; d

$$\frac{b + c}{2} = 8; \quad \frac{a + b + c + d}{4} = 7$$

$b + c = 16$ $\qquad$ $a + d = 12$

$\downarrow \quad \downarrow$ $\qquad$ $\downarrow \quad \downarrow$

8 8 $\qquad$ 1 11

Mo = 8

$\therefore$ $(abcd)_{mín.} = 704$

Clave E

27.

n.° hijos		familiar
0	⟶	2
1	⟶	3
2	⟶	4
3	⟶	6
4	⟶	4
5	⟶	1

(6 y 4) } x = 10 familias

n = 20 familias

Piden: $\frac{x}{n} . 100\% = \frac{10}{20} . 100\%$

$\therefore$ $\frac{x}{n} . 100\% = 50\%$

Clave C

28.

f_i	h_i
3m	3k
6m	6k
10m	10k
b	

Por dato:

$19m + b = 60$ ...(I)

$b < 10m$ ...(II)

Ambas condiciones se cumplen para:

$b = 3 \;\wedge\; m = 3$

Piden: $f_1 + f_4$

$f_1 + f_4 = 3m + b = 3(3) + 3 = 12$

$\therefore$ $f_1 + f_4 = 12$

Clave C

29.

I_i	x_i	f_i	h_i
[; ⟩	12		0,25
[; ⟩	20	45	0,375
[; ⟩	28		0,25
[;]	36		0,125
		120	

$\bar{x} = 12 \times 0,25 + 20 \times 0,375 + 28 \times 0,25 + 36 \times 0,125$

$\therefore$ $\bar{x} = 22$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 87) Unidad 4

Comunicación matemática

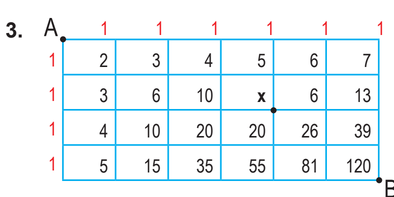
1.

2. Para completar la expresión, necesitamos todos los arreglos posibles de 3 elementos tomados de los 5 que tenemos.

Por tanto tendremos: $V_3^5 = \frac{5!}{2!} = 60$ resultados.

Clave C

3.



A	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	x	6	13
1	4	10	20	20	26	39
1	5	15	35	55	81	120 B

Se puede ir de A hasta B de 120 maneras diferentes.

Razonamiento y demostración

4. Tenemos:

$$C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = C_{m-n}^m$$

∴ Queda demostrada la propiedad.

5. Sabemos que en una variación nos importa el orden de los elementos, es decir buscamos todos los arreglos posibles. En el caso V_n^m, se encuentran todos los grupos de tamaño n que se presenta en el conjunto, esto se puede realizar de C_n^m formas, y posteriormente se realiza todas las ordenaciones posibles de cada grupo, esto es P_n. Luego, por el principio de multiplicación tenemos:

$$C_n^m \times P_n = V_n^m$$

Resolución de problemas

6. C A L U D O R

2 3 2 1 1 1 1

$$P^{11}_{2;3;2;1;1;1;1} = \frac{11!}{2!.3!.2!.1!.1!.1!.1!}$$

$$P^{11}_{2;3;2;1;1;1;1} = 1\,663\,200$$

Por lo tanto:
La suma de cifras del resultado es 18

Clave E

7. Es un caso de combinación: $C_3^8 = 56$

Por lo tanto:
Se pueden elegir 56 comités.

Clave D

8. N E A

↓ ↓ ↓

2 1 1

$$P^4_{2;1;1} = \frac{4!}{2!.1!.1!} = \frac{24}{2}$$

$$\therefore P^4_{2;1;1} = 12$$

Clave B

9. $C_2^7 \times C_3^5 \times C_2^2 = 210$

Clave E

10. $A = C_2^8 + C_3^8 + C_4^8 + C_5^8 + C_6^8 + C_7^8 + C_8^8$

$A = 247$

Por lo tanto:
Se pueden elegir de 247 maneras.

Clave B

Nivel 2 (página 87) Unidad 4

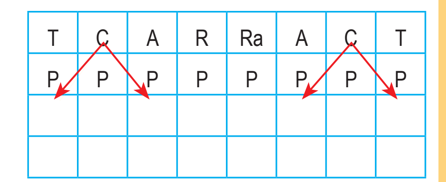
Comunicación matemática

11. El recorrido más largo es:

20, 19, 17, 15, 11, 9, 4, 3, 2, 1 o
20, 19, 17, 15, 11, 6, 4, 3, 2, 1
ambos con tamaño 10.

Notar que cada altura tiene un recorrido máximo, por tanto al calcular el recorrido máximo de una altura dada, usaremos el recorrido máximo de alguna altura anterior, es decir, un proceso recursivo.

12. Analicemos las posibilidades de movimiento del blanco:



T	C	A	R	Ra	A	C	T
P	P	P	P	P	P	P	P

Cada peón tiene 2 posibilidades de movimiento, una casilla adelante o dos casillas adelante. Como son 8 peones ya tenemos 16 posibles movimientos, además cada caballo tiene 2 posibles movimientos, al ser 2 caballos tenemos 4 movimientos posibles. Es decir un total de 20 posibles movimientos del jugador blanco. Un análisis recíproco de las fichas negras nos da 20 posibilidades.

∴ En total se tienen 20 × 20 = 400 posibles jugadas.

Razonamiento y demostración

13. Escogemos una casilla negra cualquiera. Si eliminamos su fila y columna, nos queda 12 casillas blancas para escoger. Como este procedimiento se puede repetir para cada una de las 18 casillas negras, entonces tenemos 12 × 18 = 216 maneras diferentes de escoger dos casillas, una blanca y una negra.

14. Se puede apreciar que por tener una razón constante, la sucesión es una progresión aritmética.

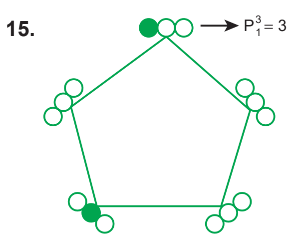
$\Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)\,r$

$t_n = t_1 + \frac{r(n-1)}{1!}$

Encontramos la forma del polinomio cuando tiene una sola diferencia.

Resolución de problemas

15.



Si se encienden k vértices, el número de señales que se obtiene es:

$\underbrace{[P_1^3 . P_1^3 . P_1^3]}_{k\ veces}C_k^5 = 3^kC_k^5$

Luego:
Sea n el número de señales diferentes.

$\Rightarrow n = 3^2C_2^5 + 3^3C_3^5 + 3^4C_4^5 + 3^5C_5^5$

$\therefore n = 1008$

Clave A

16. Las dos parejas de esposos pueden escoger los dulces de: $7^4 = 2401$ formas

Además: Tomando en cuenta su posición:

$\overbrace{\underbrace{A\ B}_{P_2^2}\ \underbrace{C\ D}_{P_2^2}}^{P_2^2} \Rightarrow P_2^2 . P_2^2 . P_2^2 = 8$

∴ Se podrán tomar: 2401 × 8 = 19 208 fotos distintas.

Clave E

17. $C_2^6 . C_2^5 + C_1^6 . C_3^5 + C_4^5 = 215$

Clave D

18. zapatos pantalones blusas

2 × 3 × 4 = 24 días

∴ Como noviembre tiene 30 días, deberá repetir su forma de vestir 6 días.

Clave C

19. $\underbrace{C_1^6 \times C_1^6}_{\text{Total de parejas}} - \underset{\text{n.° de parejas}}{6} = 30$

Clave B

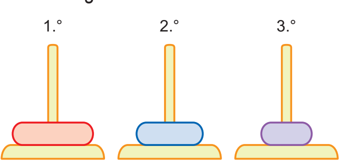
Nivel 3 (página 88) Unidad 4

Comunicación matemática

20. Si se tratara de pasar un solo disco la solución sería un solo movimiento, entonces: f(1) = 1, ya tenemos el caso base.

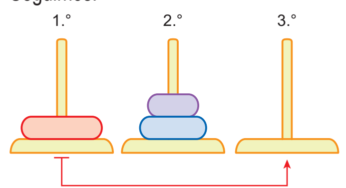
Ahora analizamos para 3 discos.

Es fácil llegar a esto:



en 2 movimientos

Seguimos:



En el 4.° movimiento tendremos el disco más grande en el tercer lugar, solo faltará mover los discos pequeños del 2.° al 3.^{er} lugar, que es lo mismo que hicimos en los primeros 3 movimientos, pasamos los discos pequeños del 1.° al 2.° lugar.

Por tanto, generalizando tenemos:

$f(n) = 2f(n-1) + 1$

Es decir, para pasar n discos del 1.^{er} al 3.^{er} lugar, primero pasamos n – 1 discos al 2.° lugar, luego pasamos 1 disco al 3.^{er} lugar y por último pasamos los n – 1 discos del 2.° a 3.^{er} lugar.

21. Se pueden presentar 4 casos:

Regala los 4 coches a un solo hermano, esto lo puede hacer de 3 formas.

Regala 3 a uno y 1 a otro, esto se puede hacer de $C_2^3 \times C_3^4 \times 2!$ formas.

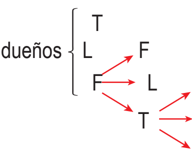
Regala 2 a uno y 2 a otro, esto se puede hacer de $C_2^3 \times C_2^4$ formas.

Regala 2 a uno, 1 a otro y 1 a otro, esto se puede realizar de $3! \times C_2^4$ formas.

Es decir se puede hacer la repartición de:

$3 + C_3^2 \times C_3^4 \times 2! + C_2^3 \times C_2^4 + 3! \times C_2^4 = 81$ formas posibles.

Ahora analicemos de manera distinta, el problema también podría plantearse, sin cambio en el resultado, del modo siguiente:
A cada coche asignaremos uno de los cuatro posibles dueños.



auto: azul blanco verde rojo

Es decir, el problema se convierte en una variación con repetición cuya solución es $3^4 = 81$ formas posibles.

Razonamiento y demostración

22. Necesitamos encontrar el término t_n, para ello debemos usar las diferencias:

$$t_n = t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_i \qquad \text{.... (1)}$$

$$r_i = r_1 + (i-1)\,d \qquad \text{.....(2)}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$t_n = t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (r_1 + (i-1)\,d)$$

$$t_n = t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (i-1)\,d$$

$$t_n = t_1 + (n-1)\,r_1 + d + 2d + 3d + \ldots + (n-2)\,d$$

$$t_n = t_1 + (n-1)\,r_1 + d(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2))$$

$$t_n = t_1 + (n-1)\,r_1 + \frac{d(n-2)(n-1)}{2}$$

$$\therefore t_n = t_1 + \frac{r_1(n-1)}{1!} + \frac{d(n-1)(n-2)}{2!}$$

23. Tenemos un conjunto C de m elementos y queremos contar el número de subconjuntos de n elementos. Ya sabemos que este número es C_n^m, pero vamos a calcularlo de otra manera.

Sea $C_1 \in$ C un elemento de C, contamos en primer lugar los subconjuntos de C de n elementos que tienen a C_1. Esto es equivalente a contar los subconjuntos de n –1 elementos del conjunto C – C_1, que son C_{n-1}^{m-1}.

En segundo lugar contamos los subconjuntos de C de n elementos que no tienen al elemento C_1. Como C_1 no puede estar en el subconjunto, tenemos que elegir a partir de los m –1 elementos restantes de C. Esto a C_n^{m-1} subconjuntos.

Aplicando ahora el principio de suma:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_n^{m-1}$$

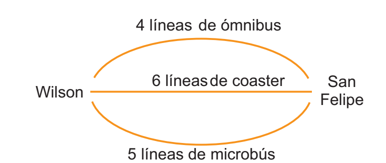
Resolución de problemas

24. $P_5^5 = \dfrac{5!}{(5-5)!} = 5!$

$\therefore P_5^5 = 120$

Clave B

25.



$\Rightarrow 4 + 6 + 5 = 15$

$\therefore$ Se puede realizar el recorrido de 15 maneras distintas.

Clave B

26. 5 faldas y 3 blusas $\Rightarrow$ 15 maneras

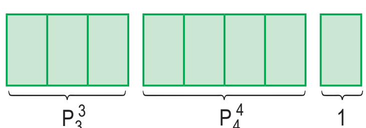
9 pantalones y 6 polos $\Rightarrow$ 54 maneras

Hallamos el total: $15 + 54 = 69$

$\therefore$ Se podrá vestir de 69 maneras distintas.

Clave D

27.



Además, como los tomos de cada obra deben estar juntos se pueden considerar como un bloque. Luego:

$\left(P_3^3 \,.\, P_4^4 \,.\, 1\right)P_3^3 = 864$

$\therefore$ Los libros pueden ubicarse de 864 formas.

Clave E

28. $C_1^5 \,.\, C_1^7 = 5 \,.\, 7 = 35$ maneras

$\therefore$ Los libros se pueden coger de 35 maneras distintas.

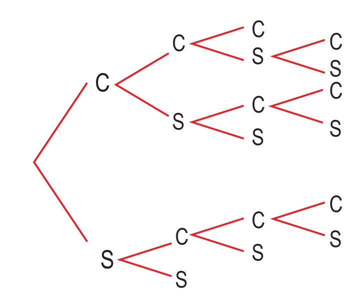
Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 91) Unidad 4

Comunicación matemática

1. Lances: 1.° 2.° 3.° 4.°

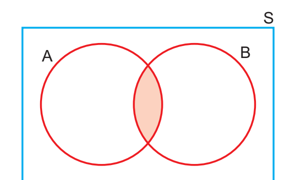


El espacio muestral consta de 10 elementos:
{(C, C, C); (C, C, S, C);
(C, C, S, S); (C, S, C, C);
(C, S, C, S); (C, S, S); (S, C, C, C);
(S, C, C, S); (S, C, S); (S, S)}

2.

Razonamiento y demostración

3. A y B son eventos de Ω, que es el espacio muestral. A y B pueden tener elementos en común, realicemos un diagrama de Venn:



La parte sombreada es $A \cap B$. Como lo que queremos es $P(A \cup B)$, esto es $P(A) + P(B)$, pero estaríamos contando dos veces a $P(A \cap B)$. Por tanto: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

4. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
$A = \{2; 4; 6\}$
$B = \{4; 5; 6\}$

$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

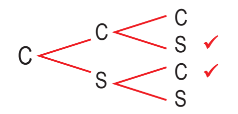
$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Se comprueba que:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A + B)$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

Resolución de problemas

5.



S < C < C ✓, S ; S < C, S

La probabilidad es $\frac{3}{8}$.

Clave B

6. $\frac{C_2^5 \times C_1^7}{C_3^{12}} = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}$

Clave A

7. Todos los ordenamientos posibles de los 6 niños es 6!, esto es el espacio muestral. Si las tres niñas se sientan juntas podemos ordenar a los 6 de 4! formas y a las niñas de 3! formas. Entonces la probabilidad es:

$\frac{3! \times 4!}{6!} = \frac{1}{5}$

Clave B

8. Cada niño pesa como 1 y cada niña pesa como 2, en total el peso es como 25. Como son 5 niñas sus posibilidades pesan como 10. Entonces la probabilidad es $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

Clave A

9. $50\% \times 0{,}7 = 0{,}35$
$30\% \times 0{,}8 = 0{,}24$
$20\% \times 0{,}9 = 0{,}18$

La probabilidad es: $\frac{0{,}35}{0{,}35 + 0{,}24 + 0{,}18} = \frac{5}{11}$

Clave D

Nivel 2 (página 91) Unidad 4

Comunicación matemática

10. a) Se puede llegar con dos pares o dos impares

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $6 + \{2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ 5 posibilidades
$5 + \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ 4 posibilidades
$4 + \{4, 5, 6\} \rightarrow$ 3 posibilidades
$3 + \{5, 6\} \rightarrow$ 2 posibilidades
$2 + \{6\} \rightarrow$ 1 posibilidad

En total hay $\frac{5(6)}{2} = 15$ posibilidades de $6 \times 6 = 36$ totales. Entonces la probabilidad es: $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

c) Las sumas $\mathring{3}$ son: {3, 6, 9, 12}
3 se puede formar: (1, 2); (2, 1)
6 se puede formar:
(5, 1); (1, 5); (4, 2); (2, 4); (3, 3)
9 se puede formar: (5, 4); (4, 5); (6, 3); (3; 6)
12 se puede formar: (6, 6)

En total 12. Entonces la probabilidad es $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

11. Por geometría sabemos que el área grande equivale a la mitad del área del cuadrado. El área pequeña equivale a la doceava parte del área del cuadrado.

Si llamamos A al área del cuadrado, la probabilidad, al lanzar una ficha, de que carga en la parte sombreada es: $\frac{A/2 + A/12}{A} = \frac{7A}{12A} = \frac{7}{12}$

Razonamiento y demostración

12. Si definimos al espacio muestral como S.

Sabemos que $P(S) = 1$ y como $P(A) + P(A') = P(S)$, entonces queda demostrado que $P(A) + P(A^C) = 1$

13. Partimos de la propiedad que si dos eventos A yB son mutuamente excluyentes se cumple:

$$P(A \cap B) = 0$$

Entonces la propiedad:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ cuando A y B son mutuamente excluyentes quedaría:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Resolución de problemas

14. Hay 3 eventos mutuamente excluyentes:

$\frac{5}{12} \times \frac{5}{18} + \frac{4}{12} \times \frac{6}{18} + \frac{3}{12} \times \frac{7}{18} = \frac{35}{108}$

Clave B

15. Los únicos números con tres divisores son los primos al cuadrado, en este caso solo 4 y 9.

4 se podría formar por la suma de (1, 1, 2) $\rightarrow$ 3 formas

9 $\rightarrow$ (6, 2, 1) $\rightarrow$ 6 formas
(5, 3, 1) $\rightarrow$ 6 formas
(5, 2, 2) $\rightarrow$ 3 formas
(4, 2, 3) $\rightarrow$ 6 formas
(4, 4, 1) $\rightarrow$ 3 formas
(3, 3, 3) $\rightarrow$ 1 forma
(7, 1, 1) $\rightarrow$ 3 formas

En total 31 formas de las $6 \times 6 \times 6 = 216$ posibles. La probabilidad es: $\frac{31}{216}$

Clave C

16. Estamos estudiando eventos independientes, por lo tanto la probabilidad es: $2/5 \times 2/5 = 4/25$

Clave C

17. El número de parejas mixtas que se puede formar son $6 \times 4 = 24$.
El número total de parejas que se puede formar es $C_2^{10} = 45$.
Entonces la probabilidad es: $\frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

Clave E

18. Sea A el evento de que a un alumno le guste Aritmética y X el evento de que le guste Álgebra. Se cumple:

$P(A \cup X) = P(A) + P(X) - P(A \cap X)$
$100\% = 70\% + 40\% - P(A \cap X)$
$10\% = P(A \cap X)$

La probabilidad de que solo le guste RA es
$P(A) - P(A \cap X) = 70\% - 10\% = 60\% = 6/10$

Clave D

Nivel 3 (página 92) Unidad 4

Comunicación matemática

19.

20. Sea A el área sombreada, 2a el lado del triángulo y a el radio de los sectores circulares.

$$A = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} - \frac{3\pi \, . \, a^2 \times 60°}{360°}$$

$$A = a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{2} = a^2\left(1{,}73 - \frac{3.14}{2}\right)$$

$A = 0{,}16\ a^2$ (aproximadamente)

$\Rightarrow$ Probabilidad de que la ficha caiga en el área sombreada es:

$$\frac{0{,}16a^2}{1{,}73a^2} = 9{,}2\%$$

Razonamiento y demostración

21. Partimos de la propiedad de probabilidad condicional, donde se cumple:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ahora, siendo A y B eventos independientes, se cumple: $P(B/A) = P(B)$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$\therefore P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$

22. Tenemos dos eventos independientes, elegir la urna y elegir una bola azul estando en la urna correcta.

La probabilidad de elegir la urna correcta es: 1/3
La probabilidad de elegir una bola azul dentro de la urna correcta es: 2/10 = 1/5

La probabilidad de encontrar una bola azul es:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

Resolución de problemas

23. Dos caballeros y una dama se pueden elegir de $C_2^5 \times 7$ maneras, y el espacio muestral sería C_3^{12}

Probabilidad del evento es:

$$\frac{C_2^5 \times 7}{C_3^{11}} = \frac{7}{22}$$

Clave D

24. La probabilidad de que al menos uno esté vivo es la unión de eventos $P(F \cup C)$.

La probabilidad de que ambos estén vivos es la intersección de eventos $P(F \cap C) = P(F)\,P(C)$ por ser independientes.

$\Rightarrow P(F \cup C) = P(F) + P(C) - P(F)\,P(C)$

$$P(F \cup C) = 1/4 + 5/13 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{13}\right)$$

$\therefore\ P(F \cup C) = 7/13$

Clave C

25. Un ordenamiento de 2 caras sería CCSS. Si quisiéramos todos los ordenamientos posibles para 2 caras, esto sería una permutación con elementos repetidos

$$\Rightarrow \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

El espacio muestral sería una variación con repetición igual a 2^4.
Por lo tanto la probabilidad del evento es:

$$\frac{6}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Clave D

26. El espacio muestral es C_6^{10}, todas las opciones de elegir 6 preguntas de las 10 disponibles. Para calcular la cantidad de elementos del evento, tomamos las preguntas 1 y 2 como fijas y luego escogemos 4 de 8 posibles.

$\therefore$ La probabilidad del evento es: $\dfrac{C_4^8}{C_6^{10}} = \dfrac{1}{3}$

Clave B

27. En primer lugar se debe elegir una urna, la probabilidad de elegir cualquiera de ellas es 1/2.

Por lo tanto la probabilidad es:

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{4}{7}$$

Clave E

28. Si Marcos y Juan estarán juntos se pueden considerar como un solo elemento:

Entonces:
Casos favorables = {0000 MJ 000; 000 JM 0000}
$= P_9^9 + P_9^9 = 2 \times 9!$

Casos posibles $= V_{10}^{10} = 10! = 10 \times 9!$
(espacio muestral)

Luego:

Probabilidad pedida $= \dfrac{2 \times 9!}{10 \times 9!} = \dfrac{1}{5}$

Clave B

29.

Primer niño	Segundo niño
P(a) = 1/5	P(a) = 1/5
P(e) = 1/5	P(e) = 1/5
P(i) = 1/5	P(i) = 1/5
P(o) = 1/5	P(o) = 1/5
P(u) = 1/5	P(u) = 1/5

Probabilidad de que ambos escriban la "a"

$$[P_{(a,\,a)}]. = P_{(a)} \, . \, P_{(a)} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{25}$$

Análogamente:

$$P_{(e,\,e)} = P_{(i,\,i)} = P_{(o,\,o)} = P_{(u,\,u)} = \frac{1}{25}$$

Nos piden:

$P_{(a,\,a)} \cup P_{(e,\,e)} \cup P_{(i,\,i)} \cup P_{(o,\,o)} \cup P_{(u,\,u)}$

$\Rightarrow P_{(a,\,a)} + P_{(e,\,e)} + P_{(i,\,i)} + P_{(o,\,o)} + P_{(u,\,u)}$

$$\therefore\ \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{1}{5}$$

Clave D

30. Sea el evento: A = acertar una pregunta

Los subgrupos de 3 preguntas que se pueden formar son:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Como cada pregunta tiene una probabilidad de 1/3 de ser acertada:

P(A) = 1/3 y P(A') = 2/3

$P(\text{acertar 3 preguntas}) = C_3^5 \times P(A \cap A \cap A \cap A^C \cap A^C)$

$= 10 \times [P(A) \, . \, P(A) \, . \, P(A) \, . \, P(A^C) \, . \, P(A^C)]$

$$= 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$\therefore$ P(acertar 3 preguntas) = 40/243 = 0,16

Clave B

MARATÓN MATEMÁTICA (página 93)

1. Sean los eventos:
A: la persona seleccionada fuma.
B: la persona seleccionada muere debido a cáncer del pulmón.
Del enunciado:
$P(A) = 0{,}20$; $P(A^c) = 0{,}80$; $P(B/A) = 10P(B/A^C)$;
$P(B) = 0{,}06$

Gráficamente:

Hombres Mujeres
Fuman A
No fuman

$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

Luego:

$P(B) = P(A)P(B/A) + P(A^C)P(B/A^C)$

$0{,}06 = (0{,}2)[10P(B/A^C)] + (0{,}8)P(B/A^C)$

$0{,}06 = 2{,}8\ P(B/A^C)$

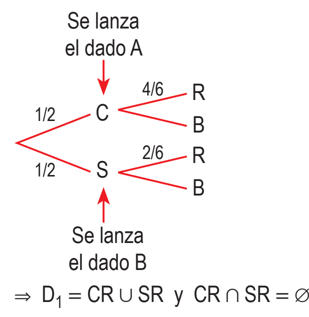
$\Rightarrow P(B/A^C) = 0{,}02143$

$\therefore\ P(B/A) = 0{,}2143$

Clave B

2. Sean los eventos:

C: sale cara en la moneda.
S: sale sello en la moneda.
R: sale cara roja en el dado.
B: sale cara blanca en el dado.
Sea el evento:
D_1: sale una cara roja en el 1.er lanzamiento.
Entonces:



$\Rightarrow\ D_1 = CR \cup SR$ y $CR \cap SR = \varnothing$

Luego:

$P(D_1) = P(CR) + P(SR)$

$= P(C)P(R/C) + P(S)P(R/S)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{2}=0,5$

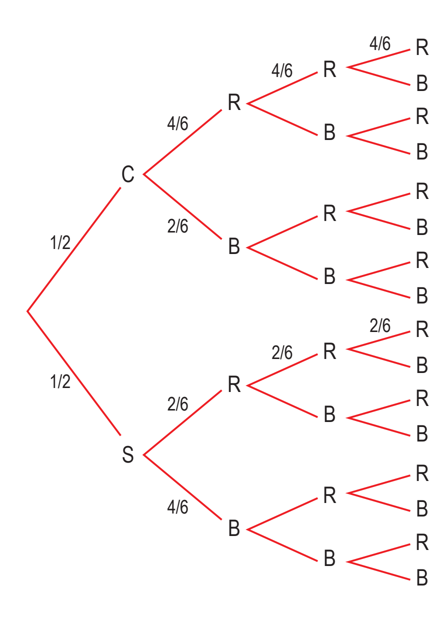
Clave D

3. Sean los eventos:

D_2: sale cara roja en el 2.° lanzamiento del dado.

D_3: sale cara roja en el 3.er lanzamiento del dado.

Entonces:



Se tiene:

$D_1D_2 = CRR \cup SRR$

Luego:

$P(D_1D_2) = P(C)P(R/C)P(R/C) + P(S)P(R/S)P(R/S)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{18}$

De forma análoga:

$D_1D_2D_3 = CRRR \cup SRRR$

Luego:

$P(D_1D_2D_3) = P(C)P(R/C)P(R/C)P(R/C) + P(S)P(R/S)P(R/S)P(R/S)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{3}{18}$

Por lo tanto:

$$P(D_3/D_1D_2) = \frac{P(D_1D_2D_3)}{P(D_1D_2)} = \frac{\frac{3}{18}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}$$

Clave E

4. Sea el evento:

D: utilizó el dado A en el juego.

$$\Rightarrow P(D/D_1D_2D_3) = \frac{P(DD_1D_2D_3)}{P(D_1D_2D_3)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}}{\frac{3}{18}} = \frac{8}{9}$$

Clave D

5. Sean los eventos:

A: la persona falla en los pagos de su préstamo personal.

B: la persona recibe un préstamo para financiar viajes de vacaciones.

Del enunciado:

$P(A) = 0,2$; $P(A^C) = 0,8$; $P(B/A) = 0,3$; $P(B/A^C) = 0,7$

Luego:

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A)+P(A^c)P(B/A^c)} = \frac{(0,2)(0,3)}{(0,2)(0,3)+(0,8)(0,7)} = 0,097$$

Clave A

6. $P(B^C/A^C) = 1 - P(B/A^C) = 1 - 0,7 = 0,3$

$P(B^C/A^C) = 1 - P(B/A) = 1 - 0,3 = 0,7$

Luego:

$$P(A^C/B^C) = \frac{P(A^c)P(B/A^c)}{P(A)P(B^c/A)+P(A^c)P(B^c/A^c)} = \frac{(0,8)(0,3)}{(0,2)(0,7)+(0,8)(0,3)} = 0,632$$

Clave B

7. Sean los eventos:

B: la persona que tiene una póliza de seguros tiene un accidente dentro del año de vigencia de su póliza.

A: la persona que tiene una póliza de seguros es propensa a accidentes.

Del enunciado:

$P(A) = 0,3$; $P(A^C) = 0,7$; $P(B/A) = 0,4$; $P(B/A^C) = 0,2$

Además: $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

Luego:

$P(B) = P(A)P(B/A) + P(A^C)P(B/A^C)$

$= (0,3)(0,4) + (0,7)(0,2) = 0,26$

Clave C

8. $$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)} = \frac{(0,3)(0,4)}{0,26} = 0,462$$

Clave C

9. Sea t el tiempo que estuvo impuesto un capital.

30% trimestral < > 120% anual

M = C + I

$$2C = C + \frac{C.120.(t+2)}{1200}$$

$$C = \frac{C.(t+2)}{10}$$

$10 = t + 2 \Rightarrow t = 8$ meses

Clave A

10. Sea C el capital impuesto.

10% trimestral < > 40% anual

Del enunciado:

M – 5%C = 4300 (al cabo de 3 años)

(C + C . 40% . 3) – 5%C = 4300

100%C + 120%C – 5%C = 4300

215%C = 4300

$\therefore$ C = S/.2000

Clave A